Zusammenfassung der Vorlesung

Analysis 3

Herbert Koch
Franz Gmeineder
Universität Bonn
Wintersemester 2018/19

Dies ist eine gekürzte Zusammenfassung und *kein* vollständiges Skript der Vorlesung. Deshalb kann diese Zusammenfassung ein Lehrbuch *nicht* ersetzen. Wie in der Vorlesung besprochen, werden folgende Bücher empfohlen:

Fo3 Forster, Analysis III, Springer
Hi2 Kaballo, Einführung in die Analysis 3,
ST Stein und Shakarchi, Real analysis. Princeton lectures in Analysis III

Die ersten zwei Bücher decken alle den Stoff der Vorlesung im Wesentlichen ab. Das Buch von Stein und Shakarchi behandelt einen großen Teil der Maßtheorie.

Tippfehler und Korrekturen bitte an

`koch@math.uni-bonn.de` oder
`fgmeined@math.uni-bonn.de`

oder in den jeweiligen Sprechstunden.

Diese Zusammenfassung ist nur für Hörer der Vorlesung V2B1 Analysis 3 an der Universität Bonn, Wintersemester 2018/19, bestimmt.

Die zentralen Themen der Vorlesung sind Integration, insbesondere das Lebesgueintegral und Lebesguemaß und Hausdorffmass, sowie Integralsätze: Fubini, Transformationsformel, Area- und Coareaformel und der Satz von Gauß. Die Vorlesung setzt die Analysis 2 aus dem Sommersemester fort und baut auf der Analysis 1+2 der linearen Algebra 1+2 auf.

Inhaltsverzeichnis

[09.10.2018]

1. Einführung

1.1. **Formeln.** In dieser Vorlesung werden wir eine Reihe von Formeln kennen lernen: Den Satz von Fubini, die Transformationsformel, die Areaformel, die Coareaformel und den Satz von Gauss. Wir werden eine Reihe von Audrücken explizit auswerten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ sei $|A| \in [0,\infty]$ das Volumen. Wir stellen die Definitionen zurück. Es gilt

$$|B_r^{\mathbb{R}^2}(0)| = \pi r^2$$

$$|B_r^{\mathbb{R}^3}(0)| = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$|B_r^{\mathbb{R}^d}(0)| = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d+2}{2})}$$

Herleitung im Fall $d = 3$: Wir betrachten die Halbkugel

$$B^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 > 0\}$$

und das Komplement des Kegels um Zylinder $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1\}$,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_3 < 1, x_3 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^3} \leq 1$$

Der Zylinder has das Volumen $|Z| = \pi$ (Grundfläche mal Höhe). Der Kegel hat das Volumen $\frac{1}{3}\pi$ ($\frac{1}{3}$ Grundfläche mal Höhe), also

$$|C| = \frac{2}{3}\pi.$$

Die Schnitte in der Höhe s haben die gleiche Fläche:

$$|\{\hat{x} \in \mathbb{R}^2 : |\hat{x}| < \sqrt{1-s^2}\} = \pi(1-s^2)$$

$$|\{\hat{x} \in \mathbb{R}^2 : s < |\hat{x}| < 1\}| = \pi(1-s^2)$$

also sind nach dem Prinzip von Cavalieri die Volumen gleich. Damit ist

$$|B_1^{\mathbb{R}^3}(0)| = \frac{4}{3}\pi.$$

Fragen:

(1) Definition des Volumens?
(2) Berechnung des Volumens?
(3) Mehrdimensionale Integrale?
(4) Was ist die Dimension einer Teilmenge?

1.2. **Fourierreihen und euklidsche Vektorräume.** Erinnerung: Ein euklidscher Vektorraum H ist ein $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Vektorraum mit einem Skalarprodukt

$$H \times H \ni (x, y) \to \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$$

sodass immer gilt:

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1 \langle x_1, y\rangle + \lambda_2 \langle x_2, y\rangle$$

$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}.$$

Damit ist $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ und wir fordern

$$\langle x, x\rangle \geq 0 \qquad \text{für } x \in H$$

und

$$\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Wir definieren einen Norm $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
Eine Folge von Vektoren (e_n) heißt Orthonormalsystem, falls

$$\langle e_j, e_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $(e_j)_{1\leq j<\infty}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt für alle $x \in H$ und $N \in \mathbb{N}$

$$x = \Big(x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\Big) + \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j$$

und

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \Big\|\Big(x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\Big) + \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\Big\|^2 \\ &= \Big\|x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\Big\|^2 + \|\sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\|^2 \\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\langle x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j, \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j\rangle \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \Big\langle x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j, \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k\Big\rangle &= \sum_{k=1}^{N} \Big\langle x, e_k\Big\rangle \Big\langle x - \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j, e_k\Big\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k\rangle \left(\langle x, e_k\rangle - \langle x, e_j\rangle\langle e_j, e_k\rangle\right) = 0 \end{aligned}$$

fällt der letzte Term weg. Genauso entwickeln wir den zweiten Term

$$\Big\langle \sum_{j=0}^{N} \langle x, e_j\rangle e_j, \sum_{k=0}^{N} \langle x, e_k\rangle e_k\Big\rangle = \sum_{j,k=0}^{N} \langle x, e_j\rangle \overline{\langle x, e_k\rangle} e_k = \sum_{j=0}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

Wir erhalten die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{j=0}^N |\langle x, e_j\rangle|^2 + \left\| u - \sum_{j=0}^N \langle x, e_j\rangle e_j \right\| = \|u\|^2$$

Insbesondere, falls $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem ist,

$$\sum_{j=0}^\infty |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

und die Reihe auf der linken Seite konvergiert. Insbesondere sind die Partialsummen

$$\sum_{j=0}^N \langle x, e_j\rangle e_j$$

eine Cauchyfolge.
Sei $H = \{u \in C([0,1];\mathbb{C}) : u(0) = u(1)\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u\bar{v}dx.$$

Der Raum H ist ein euklidscher Vektorraum mit der Norm

$$\|u\|_H^2 = \int_0^1 |u|^2 dx$$

Seien $e_j(x) = e^{2\pi ijx}$. Da

$$\langle e_j, e_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bilden die Funktionen ein Orthonormalsystem. Für $u \in H$ folgt die Identität

$$\|u\|_H^2 = \sum_{n=N}^M |\langle u, e^{2\pi inx}\rangle|^2 + \|u - \sum_{j=N}^M \langle u, e^{2\pi jx}\rangle e^{2\pi inx}\|^2$$

Es gilt nun die fundamentale Aussage

Lemma 1.1.

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=-N}^N |\langle u, e^{2\pi ijx}\rangle|^2 = \|u\|_H^2$$

die wir hier zunächst zur Kenntnis nehmen.
Es folgt

$$\sum_{n=-N}^N \langle u, e^{2\pi nx}\rangle e^{2\pi nx} \to u$$

in H. Das motiviert die Frage: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine quadratsummierbare Folge, d.h.

$$\sum_{j=-\infty}^\infty |a_j|^2 < \infty$$

Konvergiert

$$u_N = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{2\pi i n k}?$$

Die Folge u_N ist eine Cauchyfolge in H, aber H ist nicht vollständig.
Mit Hilfe des Lebesgueintegrals werden wir einen Raum $L^2([0,1])$ konstruieren, der H als dichten Teilraum besitzt. Das Lebesgueintegral erlaubt das Vertauschen von Limiten und Integration unter wesentlich schwächeren Bedingungen als für das Riemannintegral.
Für $f \in H$ definieren wir die Fourierkoeffizienten

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \langle f, e_n \rangle$$

und die Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}.$$

Beweis des Lemmas. Wir definieren den Dirichletkern

$$\begin{aligned} D_k(x) =& \sum_{n=-k}^{k} e^{2\pi i n x} \\ =& e^{-2\pi i k x} \sum_{n=0}^{2k} \left(e^{2\pi i x}\right)^n = e^{-2\pi i k x} \frac{e^{2\pi i (2k+1) x - 1}}{e^{2\pi i x} - 1} \\ =& \frac{e^{(2k+1)\pi i x} - e^{-(2k+1)\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\sum_{n=-k}^{k} \langle f, e^{2\pi i n x} \rangle e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-k}^{k} \int_0^1 e^{2\pi i n (x-y)} f(y) dy = \int_0^1 D_k(x-y) f(y) dy$$

und

$$\int_0^1 D_k(x) dx = \int_0^1 e^{2\pi i n x} dx = 1 \tag{1.1}$$

Wir definieren Fejérkern

$$\begin{aligned}
F_N(x) =& \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \\
=& \frac{1}{N}\frac{1}{e^{\pi i x}-e^{-\pi i x}}\sum_{k=0}^{N-1}(e^{(2k+1)\pi i x}-e^{-(2k+1)\pi i x}) \\
=& \frac{1}{N}\frac{1}{e^{\pi i x}-e^{-\pi i x}}\left(e^{\pi i x}\frac{e^{2N\pi i x}-1}{e^{2\pi i x}-1}-e^{-\pi i x}\frac{e^{-2N\pi i x}-1}{e^{-2\pi i x}-1}\right) \\
=& \frac{1}{N}\frac{e^{2N\pi i x}-2+e^{-2N\pi i x}}{(e^{\pi i x}-e^{-\pi i x})^2} \\
=& \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(N\pi x)}{\sin \pi x}\right)^2
\end{aligned}$$

Eigenschaften:

(1) $F_N(x) \geq 0$.
(2) $\int_0^1 F_N(x)dx = 1$ (folgt aus (1.1)).
(3) $F_N(x+1) = F_N(x)$.
(4) Für $0 < x < 1$ gilt $|F_N(x)| \leq \frac{1}{N}\frac{1}{\sin^2(\pi x)}$.

Aufgrund der Definition gilt

$$f_N(x) := \int F_N(x-y)f(y)dy = \sum_{n=-N}^{N}(1-\frac{|n|}{N})\langle f, e^{2\pi i n x}\rangle e^{2\pi i n x} \tag{1.2}$$

und

$$\int_0^1 |f_N|^2 dx = \sum_{n=-N}^{N}(1-\frac{|n|}{N})|\langle f, e^{2\pi i n x}\rangle|^2 \leq \sum_{n=-N}^{N}|\langle f, e^{2\pi i n x}\rangle|^2.$$

Wir zeigen nun: Ist $f \in H$ so folgt

$$\int F_N(x-y)f(y)dy \to f(x)$$

gleichmässig. Zunächst gilt

$$\int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) = \int F_N(x-y)(f(x)-f(y)dy$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist existiert $\delta > 0$ so dass $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/4$ für $|x-y| < \delta$. Sei $x \in [0,1]$. Wir zerlegen

$$\int_0^1 F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy = \int_{\delta<|x-y|<1-\delta} F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy + \int_{|x-y|<\delta}..dy + \int_{|x-y|>1-\delta}..dy$$

Das erste Integral ist durch

$$\frac{2}{N}\|f\|_{sup}\frac{1}{\sin^2(\delta)}$$

beschränkt. Beim zweiten und dritten Integral schreiben wir

$$\left| \int_{|x-y|<\delta} F_N(x-y)(f(y)-f(x))dy \right| \le \varepsilon \int_y F_N(y)dy = \varepsilon/4.$$

und zusammen

$$\left| \int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \right| \le \varepsilon/4 + \frac{1}{n}\|f\|_{sup} \sin^{-2}(\pi\delta) < \varepsilon$$

falls N groß ist.
Sei jetzt $f \in H$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert N_0 sodass

$$\Big| \int F_N(x-y)f(y)dy - f(x) \Big| < \varepsilon$$

für $N \ge N_0$ und daher $f_N \to f$ gleichmässig und daher

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \right| dx \to \int_0^1 |f(x)|^2 dx.$$

Wir schliessen mit (1.2)

$$\sum_{n=-N}^{N} |\langle f, e_n\rangle|^2 \ge \sum_{n=1-N}^{N} (\frac{1-n}{N})^2 |\langle f, e_n\rangle| = \left\| \int_0^1 F_N(x-y)f(y)dy \right\|^2 \to \|f\|^2.$$

□

[09.10.2018]

[11.10.2018]

1.3. **Der Satz von Banach-Tarski.** Das Volumen oder Maß von Mengen steht in engem Zusammenhang mit Integral. Für Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir das (hypothetische) Volumen mit $|A|$. Minimalanforderungen an einen Volumenbegriff sind:

(1) $|A| \in [0, \infty]$ für alle $A \subset \mathbb{R}^d$
(2) Sind A und B disjunkt, so folgt $|A \cup B| = |A| + |B|$
(3) $|A|$ ist invariant unter Kongruenzabbildungen.
(4) $|(0,1)^d| = 1$

Diese Minimalanforderungen können weder erfüllt werden, noch genügen sie für eine zufriedenstellende Theorie.

Satz 1.2 (Banach-Tarski, 1924)**.** *Es existieren paarweise disjunkte Mengen* $A_j \subset B_1^{\mathbb{R}^3}(0)$, $1 \le j \le 6$ *und sechs Kongruenzabbildungen* ϕ_j *so dass*

$$B_1(0) = \cup_{j=1}^{6} A_j \tag{1.3}$$

$$B_1(-2e_1) \cup B_1(2e_1) = \cup_{j=1}^{6} \phi_j(A_j) \tag{1.4}$$

Da aus (1.3) folgt dass

$$|B_1(0)| = \sum_{j=1}^{j} |A_j|$$

und aus (1.4)

$$2|B_1(0)| = |B_1(-2e_1)| + |B_1(2e_1)| \le \sum_{j=1}^{6} |\phi_j(A_j)| = \sum_{j=1}^{6} |A_j| = |B_1(0)|$$

würde $|B_1(0)| = 0$ folgen, was im Widerspruch zu $|(0,1)^d| = 1$ steht. Der Satz von Banach-Tarski impliziert, dass wir keine Funktion auf der Potenzmenge mit den obigen Eigenschaften finden können.

2. Das Lebesguemass

2.1. Dyadische Würfel und das äußere Lebesguemaß.

Definition 2.1. *Ein dyadischer Würfel $Q_{j,k}$, $j \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{Z}$ ist durch*

$$Q_{jk} = \{x : 2^k j_l \le x_l < 2^k(j_l + 1), 1 \le l \le d\}$$

gegeben. Q_{jk} ist ein Würfel der Kantenlänge 2^{-k} mit dem Eckpunkt $2^{-k}j$.

Eigenschaften:

(1) $Q_{jk} \cap Q_{j'k'} \ne \{\}$ impliziert $Q_{jk} \subset Q_{j'k'}$ oder $Q_{j',k'} \subset Q_{jk}$.

(2) Jede offene Menge U ist disjunkte abzählbare Vereinigung dyadischer Würfel: Sei $U \ne \mathbb{R}^d$. Zu $x \in U$ sei $Q(x)$ der maximale dyadische Würfel, der x enthält. Die maximalen Würfel sind eindeutig. Jeder Punkt liegt in einem maximalen dyadischen Wärfel. Also folgt die Aussage. Im Fall $U = \mathbb{R}^d$ schreiben wir

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^d} Q_{j,0}.$$

Wir können U als Vereinigung disjunkter Würfel schreiben, die mindestens den Abstand 2^k vom Komplement haben. Es genügt, die maximal Würfel mit dieser Eigenschaft zu nehmen.

Das Volumen ist durch

$$|Q_{jk}| = 2^{dk}$$

definiert.

Lemma 2.1. *Ist ein dyadischer Würfel endliche Vereinigung disjunkter dyadischer Würfel,*

$$Q_{jk} = \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}$$

so gilt

$$|Q_{jk}| = \sum_{n=1}^{N} |Q_{j_n k_n}|$$

Beweis. Wir verifizieren zuerst den Spezialfall einer disjunkten Vereinigung eines Würfels

$$Q_{jk} = \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k'}$$

Dann ist $k' \leq k$, es gibt $2^{d(k-k')}$ Würfel der Kantenlänge $2^{k'}$ und

$$2^{kd} = |Q_{jk}| = 2^{d(k-k')}2^{dk'} = \sum_{n=1}^{2^{dk'}} Q_{j_n k'}.$$

Im allgemeinen Fall gibt es eine kleinste Kantenlänge. Wir schreiben alle Würfel rechts als disjunkte Vereinigung dyadischer Würfel dieser Kantenlänge, und wenden die Aussage in diesem Fall auf jeden der Würfel an. □

Definition 2.2. *Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Wir nennen eine Folge dyadischer Würfel $(Q_{j_n,k_n})_n$ eine Überdeckung von A falls*

$$A \subset \bigcup Q_{j_n k_n}.$$

Wir definieren das äußere Lebesguemaß durch

$$m_*(A) = \inf\{\sum_n 2^{dk_n} : A \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n}\}.$$

Eigenschaften (A, B und A_n sind beliebige Mengen des $\mathbb{R}^d$):

(1) (Monotonie) Ist $A \subset B$ so gilt $m_*(A) \leq m_*(B)$.
(2) (Subadditivität) $m_*(A \cup B) \leq m_*(A) + m_*(B)$. Haben A und B einen positiven Abstand, so gilt $m_*(A \cup B) = m_*(A) + m_*(B)$. Es gilt immer

$$m_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n) \tag{2.1}$$

(3) Für jede beschränkte Menge A gilt $m_*(A) < \infty$.

Satz 2.2. *Für jede disjunkte Vereinigung dyadischen Würfel gilt $m_*(\bigcup_{n=0}^N Q_{j_n k_n}) = \sum_{n=0}^N |Q_{j_n k_n}|$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

[11.10.2018]

[16.10.2018]

Beweis. Da $\bigcup_n Q_{j_n k_n}$ sich selbst überdeckt gilt

$$m_*(\bigcup_n Q_{j_n k_n}) \leq \sum_{n=0}^N |Q_{j_n k_n}|.$$

Für die umgekehrte Ungleichung betrachten wir zunächst den Fall $N < \infty$ und der Einfachheit halber $N = 0$. Sei jetzt

$$Q_{jk} \subset \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n,k_n}.$$

Wäre diese Überdeckung endlich, so dürften wir wie in Lemma 2.1 annehmen, dass die Vereinigung disjunkt und gleich Q_{jk} ist. Mit Lemma 2.1 folgt dann

$$|Q_{jk}| = \sum_{n=1}^N |Q_{j_n,k_n}|.$$

Sei jetzt

$$Q_{jk} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n}$$

und $m > 1$. Wir definieren

$$\tilde{Q}_{jk} = \{x : 2^k j_l \le x_l \le 2^k (j_l + 1 - 2^{-m})$$

$$Q^m_{j_n k_n} = \{x : (2^k - 2^{-m}) j_{n,l} < x_l < 2^k (j_l + 1).$$

Es folgt

$$\tilde{Q}_{jk} \subset Q_{jk} \subset \bigcup_n Q_{j_n k_n} \subset \bigcup_n Q^m_{j_n k_n}.$$

Der linke Würfel ist kompakt. Er wird durch die offenen Würfel rechts überdeckt. Daher existiert eine endliche Teilüberdeckung bzw $N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\tilde{Q}_{jk} \subset \bigcup_{n=0}^{N} Q^m_{j_n k_n}$$

Der Würfel $\tilde{Q}_{jk}$ hat die Kantenlänge $2^k(1 - 2^{-m}$ und enthält eine disjunkte Vereinigung von $(2^m - 1)^d$ dyadischen Würfeln der Kantenlänge 2^{k-m} enthalten.

Die Würfel $Q_{j_n k_n}$ haben die Kantenlänge $2^{k_n}(1 + 2^{-m})$ und sind in einer disjunkten Vereinigung von $(1 + 2^m)^d$ dyadischen Würfeln der Kantenlänge $2^{k_n - m}$ enthalten. Wir wenden Lemma 2.1 auf jeden der Teilwürfel von Q_{jk} an und erhalten

$$(2^m - 1)^d 2^{(k-m)d} \le (2^m + 1)^d \sum_{n=0}^{N} 2^{(k_n - m)d}$$

und damit

$$|Q_{jk}| \le \left(\frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-m}} \right)^d \sum_{n=0}^{N} |Q_{j_n k_n}| \le \left(\frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-m}} \right)^d \sum_{n=0}^{\infty} |Q_{j_n k_n}|.$$

Die Aussage folgt nun mit $m \to \infty$.

Der allgemeine Fall einer abzählbaren Vereinigung folgt nun leicht: Die dyadischen Würfel $Q_{j_n k_n}$ seien disjunkt. Es folgt für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} |Q_{j_n k_n}| = m_*(\bigcup_{n=0}^{N} Q_{j_n k_n}) \le m_*(\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_{j_n k_n}) \le \sum_{n=0}^{\infty} |Q_{j_n k_n}|.$$

Die linke Seite ist die Partialsumme der rechten Reihe. Damit muss die letzte Ungleichung ein $=$ sein. $\square$

2.2. **Messbare Mengen.**

Definition 2.3. *Wir nennen eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesguemessbar, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $A \subset U \subset \mathbb{R}^d$ existiert, so dass*

$$m_*(U \backslash A) < \varepsilon$$

Wir werden sehen: Jede offene Menge ist messbar. Abzählbare Vereinigungen und Schnitte messbarer Mengen sind messbar. Komplemente messbarer Mengen sind messbar. Das äußere Maß eingeschränkt auf die messbaren Mengen hat gute Additivitätseigenschaften.

Eigenschaften:

(1) Jede offene Menge ist trivialerweise messbar. Nach Satz 2.2 ist das Maß die Summe der Volumina disjunkter dyadischer Würfel, deren Vereinigung die offene Menge ist.

(2) Jede Menge A mit $m_*(A) = 0$ ist messbar: Ist $\varepsilon > 0$, so existiert eine Überdeckung durch dyadische Würfel mit

$$A \subset \bigcup_n Q_{j_n,k_n}$$

und

$$\sum_n |Q_{j_n,k_n}| < 2^{-d}\varepsilon.$$

Sei

$$Q_n = \{x : 2^{k_n}(j_{n,l} - 1) < x_l < 2^{k_n}(j_{n,l} + 1)\}$$

die offenen Würfel mit doppelter Kantenlänge. Deren Vereinigung ist offen und überdeckt A. Da Q_n in 2^d dyadischen Würfeln der Kantenlänge 2^{k_n} enthalten ist folgt

$$m_*(\bigcup Q_n) \le 2^d \sum_n |Q_{j_n,k_n}| < \varepsilon.$$

Diese Mengen nennen wir Nullmengen.

(3) Jede abzählbare Vereinigung messbarer Mengen ist messbar. Seien A_n messbar für $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren offene Mengen $A_n \subset U_n$ mit

$$m_*(U_n \backslash A_n) < 2^{-n-1}\varepsilon$$

und

$$m_*(\bigcup U_n \backslash \bigcup A_m) \le m_*(\bigcup_n (U_n \backslash A_n) \le \sum_n m_*(U_n \backslash A_n) < \varepsilon.$$

(4) Abgeschlossene Mengen sind messbar. Wegen Eigenschaft 3 genügt es zu zeigen, dass kompakte Mengen messbar sind. Sei A kompakt. Für $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $A \subset U$ mit

$$m_*(U) \le m_*(A) + \varepsilon.$$

Da A kompakt ist $V = U \backslash A$ offen. Daher ist V disjunkte Vereinigung dyadischer Würfel

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j_n k_n}$$

mit positive Distanz zu A. Daher ist mit Satz 2.2

$$\begin{aligned} m_*(A)+\varepsilon \geq & m_*(U) \geq m_*(A \cup_{n=1}^M Q_{j_n,k_n}) = m_*(A) + m_*(\bigcup_{n=1}^M Q_{j_n,k_n}) \\ = & m_*(A) + \sum_{n=1}^M |Q_{j_n,k_n}| \to m_*(A) + \sum_{n=1}^\infty |Q_{j_n,k_n}| \\ = & m_*(A) + m_*(U \backslash A) \end{aligned}$$

Damit ist $m_+(U\backslash A) < \varepsilon$ und A messbar.

(5) Das Komplement einer messbaren Menge ist messbar. Sei A messbar. Dann existieren offene Mengen U_n, die A enthalten, mit $m_*(U_n\backslash A) < 1/n$. Deren Komplement ist abgeschlossen und daher messbar, und damit auch $S = \bigcup_{n=1}^\infty (\mathbb{R}^d \backslash U_n)$. Nun folgt $\subset \mathbb{R}^d\backslash A$ und für $n \geq 1$

$$T := (\mathbb{R}^d\backslash A)\backslash S \subset U_n \backslash A$$

Damit ist

$$m_*((\mathbb{R}^d\backslash A)\backslash S) < \frac{1}{n}$$

und daher eine Nullmenge. Das Komplement ist die Vereinigung zweier messbarer Mengen

$$\mathbb{R}^d \backslash A = S \cup T,$$

und damit messbar.

(6) Abzählbare Schnitte messbarer Mengen sind messbar. Dies folgt durch zweimalige Komplementbildung.

Satz 2.3. *(Abzählbare Addititivität). Seien E_j disjunkte messbare Mengen. Dann ist die Vereinigung messbar und es gilt*

$$m_*(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) = \sum_{n=1}^\infty m_*(E_j).$$

Beweis. Zuerst nehmen wir an, dass alle E_n beschränkt sind. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathbb{R}^d\backslash E_n$ messbar ist existiert nach der Definition eine abgschlossene (und daher kompakte) Teilmenge $F_n \subset E_n$ mit $m_*(E_n\backslash E_n) < 2^{-n-1}\varepsilon$. Die Mengen F_n sind disjunkt und kompakt, haben also einen positiven Abstand und daher gilt für $N \in \mathbb{N}$

$$m_*(\bigcup_n E_n) \geq m_*(\bigcup_{n=0}^N F_n) = \sum_{n=0}^N m_*(F_n) \geq \sum_{n=0}^N m_*(E_n) - \varepsilon.$$

Daher folgt

$$m_*(\bigcup_n E_n) \geq \sum_n m_*(E_n).$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt immer für das äußere Maß und wir erhalten die Aussage für beschränkte E_n.

Im allgemeinen Fall definieren wir

$$E_{n,m} = E_n \cap \{x \in \mathbb{R}^d : m \leq |x| < m+1\}$$

und wenden die erste Aussage auf

$$E_n = \bigcup_m E_{n,m}$$

und

$$\bigcup_n E_n = \bigcup_{n,m} E_{n,m}$$

an. ☐

Definition 2.4. *Wir definieren das Lebesgue m durch die Einschränkung des äußeren Maßes auf messbare Mengen.*

Wir erhalten eine Reihe von Konsequenzen.

Lemma 2.4. *Seien E_n messbar. Es gelte $E_n \subset E_{n+1}$ und $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Dann ist E messbar und es gilt*

$$m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n). \tag{2.2}$$

Ist $E_{n+1} \subset E_n$ und $m(E_n) < \infty$ für ein n so ist $E = \bigcap_{n=1}^\infty E_n$ messbar und es gilt (2.2)

Beweis. Sei $E_n \subset E_{n+1}$ und $F_0 = E_0$, $F_n = E_{n+1} \backslash E_n$. Dann ist

$$E_N = \bigcup_{n=0}^N F_n, \qquad E = \bigcup_{n=0}^\infty F_n$$

$F_n = E_{n+1} \cap (\mathbb{R}^d \backslash E_n)$ ist messbar und damit

$$m(E_N) = \sum_{n=0}^N m(F_n), \qquad m(E) = \sum_{n=0}^\infty m(F_n) = \lim_{N\to\infty} m(E_n).$$

Ist $E_{n+1} \subset E_n$, so nehmen wir zunächst an, dass E_0 beschränkt ist, d.h. es existiert $R > 0$ so dass $E_0 \subset B_R(0)$. Es folgt

$$m(B_R(0)) - m(E) = m(B_R(0)\backslash E) = \lim_{n\to\infty} m(B_R(0)\backslash E_n) = m(B_R(0)) - \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Damit folgt der allgemeine Fall. ☐

[16.10.2018]

[18.10.2018]

Satz 2.5. *$A \subset \mathbb{R}^d$ sei messbar und $\varepsilon > 0$*

(1) *Es existiert eine offene Menge $A \subset U$ mit $m(U\backslash A) < \varepsilon$.*
(2) *Es existiert eine abgeschlossene Menge $B \subset A$ mit $m(A\backslash B) < \varepsilon$.*
(3) *Ist $m(A) < \infty$ so existiert eine kompakte Menge $K \subset A$ mit $m(A\backslash K) < \varepsilon$.*
(4) *Ist $m(A) < \infty$, so existiert eine endliche Vereinigung*

$$F = \bigcup_{n=1}^N Q_{j_n,k_n}$$

disjunkter dyadischer Würfel, so dass für die symmetrische Differenz

$$E\Delta F = (E \cup F)\backslash(E \cap F)$$

gilt

$$m(E\Delta F) < \varepsilon.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition der Messbarkeit. Die Aussage zwei folgt mit dem Übergang zu Komplementen. Für die dritte Aussage verwenden wir die Existenz einer abgeschlossenen Menge F so dass $m(A\backslash F) < \varepsilon/2$. Wir definieren die kompakten Mengen

$$K_n = F \cap \overline{B_n(0)}.$$

Aus Lemma 2.4 folgt die Existenz von n_0 mit

$$m(K_n) \geq m(F) - \varepsilon/2$$

für $n \geq n_0$. Damit gilt für diese n

$$m(A\backslash K_n) < \varepsilon$$

□

Satz 2.6. *Sei*

$$\phi : x \to Ax + b$$

eine affine invertierbare Abbildung. Ist E messbar, so ist auch $\phi(E)$ messbar und es gilt

$$m(\phi(E)) = |\det(A)| m(E).$$

Beweis. Da die Umkehrabbildungen jeweils die selbe Gestalt haben, genügt es zu zeigen, dass

$$m_*(\phi(A)) \leq |\det(A)| m_*(A).$$

Ist $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty Q_{j_n k_n}$ so folgt

$$m_*(\phi(A)) \leq m_*(\bigcup \phi(Q_{j_n k_n}) \leq \sum_{n=1}^\infty m_*(\phi(Q_{j_n k_n})$$

und es genügt nachzuweisen, dass

$$m_*(\phi(Q_{jk})) \leq |\det(A)||Q_{jk}|.$$

Affine invertierbare Abbildungen lassen sich als Komposition einer Translation und einer invertierbaren linearen Abbildung schreiben. Jede invertierbare lineare Abbildung ist Produkt von Elementarmatrizen. Damit genügt es, die Behauptung für Translationen und Elementarmatrizen zu zeigen.

(1) Translation in eine Koordinatenrichtung. Die allgemeine Translation ist eine Komposition von Translationen in einzelne Richtungen. Wir betrachten eine Translation in die erste Koordinatenrichtung. Sei Q_{jk} ein dyadischer Würfel, und $Q_{jk} + he_1$ der um h verschobene Würfel. Die Kantenlänge bleibt gleich. Sei $m \leq k$. Dann ist $Q_{jk} + he_1$ in der Vereinigung von $2^{(k-m)(d-1)}(2^{k-m} + 1)$ disjunkten dyadischen Würfel der Kantenlänge 2^m enthalten und damit

$$m_*(Q_{jk} + he_1) \leq 2^{kd}(1 + 2^{m-k}) \to 2^{kd} \qquad \text{mit } m \to -\infty.$$

Damit folgt die Aussage für jede Translation.

(2) Der Fall
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$
mit $\lambda \neq 0$. Sei Q_{jk} ein dyadischer Würfel und AQ_{jk} sein Bild unter A. Wir argumentieren wie oben. Da sich nur die erste Koordinate ändert, genügt es, $d = 1$ zu betrachten. Wir unterteilen ein Intervall der Länge $2^k|\lambda|$ in kleine dyadische Intervalle. Sei $2^m < 2^k|\lambda|$. Dann ist das Intervall in höchstens der Vereinigung von $\lambda 2^{k-m} + 2$ dyadischen Intervallender Länge 2^m enthalten und
$$m_*(A(Q_{jk}) \leq \lambda 2^k - 2^m) \to \lambda 2^k.$$

(3) Der Fall
$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$
Das Argument ist am klarsten im zweidimensionalen Fall. Die Abbildung ist eine Scherung, die die zweite Koordinate fest läßt. Sei wieder Q_{jk} ein dyadischer Würfel und AQ_{jk} sein Bild. Sei wieder $m \in \mathbb{Z}$ mit $2^m < 2^k$. Die in Q_{jk} enthaltenen dyadischen Würfel der Kantenlänge 2^m unterteilen wir in 2^{k-m} horizontale Schichten. Jede Schicht ist in höchstens $2^{k-m} + 2|h| + 1$ dyadischen Würfeln enthalten. Damit folgt
$$m_*(AQ_{jk}) \geq 2^{2k}(1 + (2|h|+1)2^{m-k}) \Longrightarrow 2^{2k} \qquad \text{mit } m \to \infty.$$

(4) Da Permutationen dyadische Würfel auf dyadische Würfel abbildet, haben wir die Aussage für Permutationen.

Jede invertierbare Matrix ist Produkt von Elementarmatrizen. □

Definition 2.5. *Sei X eine Menge. Eine Familie von Teilmengen des X, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, heißt σ Algebra, falls*

(1) $\{\ \} \in \mathcal{A}$
(2) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow X \backslash A \in \mathcal{A}$
(3) $A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{A}$.

Die Lebesguemengen bilden eine σ Algebra.

Wir bei den Lebesguemengen sieht man, dass für jede σ Algebra auch abzählbare Schnitte von Mengen der σ Algebra wieder in der σ Algebra liegen.

Beispiele

- Sei X eine Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{A} = \{\{\ \}, X\}$.
- Die Lebesguemengen
- Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es eine kleinste σ Algebra, die alle offenen Mengen enthält. Wir definieren sie als den Schnitt aller σ Algebren, die alle offenen Mengen enthalten. Da es mit der Potenzmenge mindestens eine derartige σ Algebra gibt, und da man leicht zeigen kann, dass beliebige Schnitte von σ Algebren wieder σ

Algebren sind, ist diese σ Algebra wohldefiniert. Wir nennen sie die σ Algebra der Borelmengen und bezeichen sie mit $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Bemerkungen

(1) Da
$$Q_{jk} = \{x : x_l < 2^k(j_l+1)\} \cap \{x : x_l \geq 2^k j_l\}$$
wobei die erste Menge offen und die zweite abschlossen ist (und damit das Komplement einer offenen Menge) ist $Q_{jk} \in \mathcal{A}$.

(2) Translate von Borelmengen sind wieder Borelmengen. Das liegt aufgrund der Definition nahe und ist Teil einer Übungsaufgabe.

Satz 2.7. $\lambda : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften*

(1) $\lambda(Q_{0,0}) = 1$
(2) *Sind* $A_n \in \mathcal{A}$ *disjunkt, so gilt* $\lambda(\bigcup_n A_n) = \sum_n \lambda(A_n)$.
(3) *Für alle* $A \in \mathcal{A}$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\lambda(A+x) = \lambda(A)$.

Dann gilt $\lambda(A) = m(A)$ *für jede Borelmenge* A.

Beweis. Aufgrund der Translationsinvarianz ist $\lambda(Q_{jk})$ nur eine Funktion von k und
$$\lambda(Q_{jk}) = \lambda(Q_{0k}) = 2^d \lambda(Q_{0,k-1})$$
Mit Induktion erhalten wir $m(Q_{jk}) = 2^{kd}$. Da offene Mengen disjunkte Vereinigungen dyadischer Würfel sind folgt mit der Additivität $\lambda(U) = m(U)$ für jede offene Menge U. Die allgemeine Aussage folgt mit Satz 2.5 . □

[18.10.2018]

[23.10.2018]

3. Allgemeine Masse und der Satz von Carathéodory

Die Strukturen des Lebesguemaßes können abstrahiert und verallgemeinert werden.

3.1. Äußere Maße, das Hausdorffmaß.

Definition 3.1 (Hausdorffmaß)**.** *Sei* (X,d) *ein metrischer Raum und* $0 \leq \alpha$ *und*
$$c_\alpha = \frac{\pi^{\alpha/2}}{\Gamma(\frac{\alpha+2}{2})}.$$
Wir definieren für $A \subset X$
$$\mathcal{H}^\alpha_\delta(A) = c_\alpha \inf\Big\{ \sum_{n=1}^\infty (\operatorname{diam} F_n/2)^\alpha : A \subset \bigcup_{n=1}^\infty F_n \Big\}$$
und das äußere Hausdorffmaß
$$\mathcal{H}^\alpha_*(A) = \limsup_\delta m_{\alpha,\delta}(A) \in [0,\infty) \cup \infty$$

Eigenschaften:

(1) $\delta \to m_{\alpha,\delta}(A)$ fällt monoton in δ. Damit ist das Supremum der Limes.
(2) Es gilt: $A \subset B \Longrightarrow \mathcal{H}^\alpha_\delta(A) \leq \mathcal{H}^\alpha_\delta(B), \mathcal{H}^\alpha_*(A) \leq \mathcal{H}^\alpha_*(B)$.

(3) Es gilt immer

$$\mathcal{H}^\alpha_*(\bigcup A_n) \le \sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha_*(\bigcup A_n)$$

Wir zeigen diese Aussage für $\mathcal{H}^\alpha_\delta$ genauso wie beim äußeren Lebesguemaß: Sei $\varepsilon > 0$, $(F_{nm})_m$ eine Überdeckung von A_n mit $\operatorname{diam} F_{nm} < \delta$ und

$$c_\alpha \sum_{m=1}^\infty (\operatorname{diam} F_{nm}/2)^\alpha \le \mathcal{H}^\alpha_\delta(A_n) + 2^{-1-n}\varepsilon.$$

Da

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset \bigcup_{n,m=1}^\infty F_{nm}$$

folgt

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) < \sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha_\delta(A_n) + \varepsilon$$

und

$$\mathcal{H}^\alpha_\delta \bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) \le \sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha_\delta(A_n),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^\alpha_*\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) &= \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta \bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) \\
&\le \lim_{\delta\to 0} \sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha_\delta(A_n), \\
&\le \sum_{n=1}^\infty \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^\alpha_\delta(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \mathcal{H}^\alpha_*(A_n)
\end{aligned}$$

(4) Seien $A, B \subset X$ mit posititivem Abstand. Dann gilt

$$\mathcal{H}^\alpha_*(A \cup B) = \mathcal{H}^\alpha_*(A) + \mathcal{H}^\alpha_*(B).$$

Das folgt aus der Aussage für $\mathcal{H}^\alpha_\delta$ falls δ kleiner als der Abstand ist.

(5) $\mathcal{H}^0_*(A)$ ist die Zahl der Elemente.

(6) Sind (X, d) und (Y, δ) metrische Räume, $\phi : X \to Y$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstanten L, so gilt

$$\mathcal{H}^\alpha_*(\phi(A)) \le L^\alpha \mathcal{H}^\alpha_*(A).$$

Diese Aussage folgt aus

$$\mathcal{H}^\alpha_{L\delta}(\phi(A)) \le \mathcal{H}^\alpha_\delta(A)$$

da aus

$$A \subset \bigcup_{n=1}^\infty F_n$$

folgt

$$\phi(A) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi(F_n)$$

und

$$\operatorname{diam} \phi(F_n) \leq L \operatorname{diam} F_n.$$

(7) Für $X = \mathbb{R}^d$ ist das äußere Hausdorffmaß translationsinvariant and es gilt

$$\mathcal{H}^\alpha_*(\lambda A) = \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A)$$

(8) Falls $\alpha < \beta$ und $\mathcal{H}^\alpha_*(A) > 0$ so ist $\mathcal{H}^\beta_*(A) = \infty$. Ist $\mathcal{H}^\beta(A) < \infty$ so ist $\mathcal{H}^\alpha_*(B) = 0$.

3.2. **Der Satz von Carathéodory.**

Definition 3.2. *Sei X eine Menge. Eine Abbildung*

$$\mu_* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

heißt äußeres Maß, falls

- $\mu_*(\{\ \}) = 0$
- $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
- $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

Ist (X, d) ein metrischer Raum und μ_* ein äußeres Maß, so nennen wir μ_* äußeres metrisches Maß, falls

$$\mu_*(A \cup B) = \mu_*(A) + \mu_*(B)$$

falls die Distanz zwischen A und B positiv ist.

Definition 3.3 (Carathéodory messbar)**.** *Sei μ_* ein äußeres Maß auf X. Wir nennen eine Menge $A \subset X$ μ messbar, falls*

$$\mu_*(E) = \mu_*(A \cap E) + \mu_*((X \backslash A) \cap E)$$

für jede Teilmenge $E \subset X$.

Satz 3.1. *Die μ messbaren Mengen bilden eine σ Algebra. Sind die Mengen A_n messbar und disjunkt für $n \in \mathbb{N}$ so gilt*

$$\mu_*(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu_*(A_n).$$

Ist μ_* ein metrisches äußeres Maß so ist jede Borelmenge messbar.

Wir definieren das Maß μ als die Einschränkung von μ_* auf die messbaren Mengen.

Beweis. Offensichtlich sind X und die leere Menge messbar. Ist A messbar, dann ist offensichtlich $X \backslash A$ messbar.

Seien jetzt A_1 und A_2 disjunkt und messbar, $E \subset X$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mu_*(E) =&\mu_*(A_1 \cap E) + \mu_*((X\backslash A_1) \cap E \\ =&\mu_*(A_1 \cap A_2 \cap E) + \mu_*((X\backslash A_1) \cap A_2 \cap E) \\ &+ \mu_*(A_1 \cap (X\backslash A_2) \cap E) + \mu_*((X\backslash A_1) \cap (X\backslash A_2) \cap E) \\ \geq&\mu_*((A_1 \cup A_2) \cap E) + \mu_*(X\backslash(A_1 \cup A_2) \cap E) \\ \geq&\mu_*(E).\end{aligned}$$

Daher müssen alle $' \leq' \; ' =' $ sein. Mit $E = X$ erhalten wir

$$m_*(A_1 \cup A_2) = m_*(A_1) + m_*(A_2).$$

Sei jetzt $G = \bigcup_n A_n$ eine abzählbare Vereinigung disjunkter Mengen und $G_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann ist G_N messbar. Für $E \subset X$
Sei $E \subset X$. Dann ist - da A_n messbar -

$$\mu_*(G_N \cap E) = \mu_*(A_N \cap (G_N \cap E)) + \mu_*(X\backslash A_N \cap G_N \cap E) = \sum_{n=1}^{N} \mu_*(A_n \cap E)$$

und

$$\begin{aligned}\mu_*(E) =&\mu_*(G_N \cap E) + \mu_*((X\backslash G_N) \cap E) \\ \geq& \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E) + \mu_*(X\backslash G \cap E) \\ \geq&\mu_*(G \cap E) + \mu_*(X\backslash G \cap E) \geq \mu_*(E).\end{aligned}$$

Damit müssen alle Ungleichungen Gleichungen sein. Mit $E = G$ erhalten wir die Additivität. Seien jetzt A_n messbare Mengen, nicht notwendig disjunkt. Wir schreiben rekursiv $B_1 = A_1$.

$$A_N = (A_N \cap (A_N \cap \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n)) \cup A_N \cap \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n) =: B_N \cup D_N$$

Dann ist (wieder mit rekursiver Argumentation) B_N messbar und

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \bigcup_{n=1}^{N} B_n.$$

Sei jetzt μ_* ein metrisches äußeres Maß. Wir zeigen: Abgeschlossene Mengen sind messbar. Daraus folgt das jede Borelmenge messbar ist.

Sei F eine abgeschlossene Menge und $E \subset X$ mit $\mu_*(E) < \infty$. Wir definieren $E_n = \{x \in X\backslash F : d(x, F) \geq 1/n\}$. Es folgt

$$(X\backslash F) \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Die Mengen $F \cap E$ und E_n haben mindestens den Abstand $1/n$. Also folgt

$$\mu_*(E) \geq \mu_*((F \cap E) \cup E_n) = \mu_*(F \cap E) + \mu_*(E_n).$$

Wir behaupten

$$\mu_*((E \cup F)\backslash F) = \lim_{n\to\infty} \mu_*(E_n),$$

woraus die Messbarkeit von F folgt.
Da μ_* ein metrisches äußeres Maß ist folgt

$$\mu_*(E_{2n+1}) \geq \mu_*((E_{2n+1}\backslash E_{2n}) \cup E_{2n-1}) = \mu_*(E_{2n+1}\backslash E_{2n})) + \mu_*(E_{2n-1})$$

und daher

$$\mu_*(A_{2n+1}) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu(E_{2j+1}\backslash E_{2n}).$$

Genauso sehen wir

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu(E_{2j} - E_{2j-1})) \leq \mu_*(E_{2n})$$

Da μ_* ein äußeres Maß ist gilt

$$\mu_*(E_n) \leq \mu_*((X\backslash F) \cap E) \leq \mu_*(E_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu_*(E_j\backslash E_{j-1}).$$

Die Reihe konvergiert und wir erhalten $\mu_*(E_n) \to \mu_*((X\backslash F) \cap E)$. □

[23.10.2018]

[25.10.2018]

Das äußere Hausdorffmaß ist ein metrisches äußeres Maß. Wir nennen das entsprechende Maß das Hausdorffmaß der Dimension α.

Definition 3.4. *Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ eine σ Algebra. Ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung*

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$

mit den Eigenschaften

(1) $\mu(\{\ \}) = 0$
(2) *(σ Additivität) Sind $A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt, so gilt*

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ so heißt μ Borelmaß.

Beispiele für Maße sind das Lebesguemaß und die Hausdorffmaße. Sie sind keine Borelmaße, da die σ Algebra zu groß ist, aber die Einschränkung auf Borelmengen ist ein Borelmaß.

Lemma 3.2. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, A_n messbar und $A_n \subset A_{n+1}$. Dann gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Ist $A_{n+1} \subset A_n$ und $\mu(A_N) < \infty$ für ein N,

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Der Beweis ist identisch zum Beweis von Lemma 2.4.

Lemma 3.3 (Regularität)**.** *Das Borelmaß μ sei endlich auf jedem Ball, d.h. $\mu(B_r(x)) < \infty$ für $x \in X$ und $r > 0$. Für jede Borelmenge A existieren eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge F mit $F \subset A \subset U$ und $\mu(U \backslash F) < \varepsilon$. Ist zusätzlich $X = \mathbb{R}^d$ und $\mu(A) < \infty$, so existiert eine kompakte Menge K mit $K \subset A$ und $\mu(K \backslash A) < \infty$.*

Beweis. $\mathcal{B}$ sei die Menge der Borelmengen A, für die für alle $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U existiert mit $A \subset U$ und

$$\mu(A \backslash U) < \varepsilon.$$

Jede offene Menge ist in $\mathcal{B}$. Wie in Abschnitt 2.2 sehen wir, dass $\mathcal{B}$ abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen ist. Sei $A \subset X$ abgeschlossen mit $\mu_*(A) < \infty$ und $U_n = \{x : \operatorname{dist}(x, A) < 1/n\}$. Dann ist $A = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Nach Lemma 3.2 folgt falls $\mu(U_N) < \infty$ für ein N (was gilt falls A beschränkt ist)

$$\lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = \mu(A)$$

und damit

$$\mu(U_n \backslash A) \to 0.$$

Im allgemeinen Fall betrachten wählen wir $x_0 \in X$ und $A_n = A \cap \overline{B_n(x_0)}$. Dann existieren offene Mengen V_n mit $A_n \subset V_n$ und $\mu(V_n \backslash A_n) < 2^{-n-1}\varepsilon$. Wir definieren $U = \bigcup V_n$. Ähnlich in Abschnitt 2.2 sehen wir, dass das Komplement einer Menge in $\mathcal{B}$ wieder in $\mathcal{B}$ liegt. Hierbei verwenden wir, daas das Komplement einer Borelmenge wieder eine Borelmenge ist.

Damit ist $\mathcal{B}$ eine σ Algebra von Borelmengen, die alle offenen Mengen enthält. Daher ist $\mathcal{B}$ die Menge der Borelmengen.

Die restlichen Aussagen des Satzes folgen wie beim Lebesguemaß. □

Bemerkung: Mengen vom äußeren Maß Null heißen Nullmengen. Nullmengen sind messbar.

3.3. Das d dimensionale Hausdorffmaß in $\mathbb{R}^d$.

Satz 3.4. *Jede Lebesguemenge ist $\mathcal{H}^d$ messbar und umgekehrt. Es gilt*

$$m(A) = \mathcal{H}^d(A)$$

für jede Lebesguemenge A.

Wir beginnen mit der isodiametrische Ungleichung die wir später beweisen werden.

Lemma 3.5 (Isodiametrische Ungleichung)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Dann gilt*

$$m_*(A) \le m_*(B^{\mathbb{R}^d}_{\operatorname{diam}(A)/2})$$

Beweis. **1. Schritt** Wir zeigen zunächst: Für $A \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$m_*(A) \le \mathcal{H}^d_*(A) \le c_d 2^{-d} d^{d/2} m_*(A).$$

Wir bemerken zunächst, dass wir in der Definition des Hausdorffmasses ohne Einschränkung offene Mengen A_i nehmen (Warum?).

Sei zunächst $\mathcal{H}^d(A) < \infty$ und $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, A_n offen. Dann gilt

$$m_*(A) \leq \sum_{n=1}^\infty m_*(A_i) \leq c_d \sum_{n=1}^\infty (\operatorname{diam}(A_n)/2)^d$$

wobei wir die isodiametrische Ungleichung verwenden. Für jedes $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ können wir eine derartige Überdeckung mit offenen Mengen finden, so dass zusätzlich $\operatorname{diam} A_n < \delta$ und die Summe rechts $< \mathcal{H}^d_*(A) + \varepsilon$ ist. Damit folgt die erste Ungleichung.

Sie jetzt $m_*(A) < \infty$, $\delta > 0$ und A Teilmenge der disjunkten Vereiningung

$$A \subset \bigcup_{n=1}^\infty |Q_{j_n k_n}|$$

mit $2^{k_n}\sqrt{d} < \delta$ (und damit $\operatorname{diam} Q_{j_n k_n} < \delta$). Dann folgt

$$\mathcal{A}^d_\delta < c_d \sum_{n=1}^\infty (\operatorname{diam} Q_{j_n k_n})^d = c_d \sum_{n=1}^\infty 2^{-d} d^{d/2} 2^{dk_n} = c_d 2^{-d} d^{d/2} \sum_{n=1}^\infty |Q_{j_n k_n}|.$$

Damit folgt die rechte Ungleichung.

2. Schritt: Das Überdeckungslemma von Vitali

Lemma 3.6 (Überdeckungslemma von Vitali)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $B_{r_n}(x_n)$, $1 \leq n \leq N$ eine endliche Menge von Bällen. Dann existiert $M \subset \{1, \dots N\}$ so dass*

$$\bigcup_{n=1}^N B_{r_n(x_n)} \subset \bigcup_{m \in M} B_{3r_m}(x_m)$$

und $B_{r_m}(x_m) \cap B_{r_l}(x_l) = \{\}$ falls $m, l \in M$ und $m \neq l$.

Beweis. Ohne Einschränkungen seien die Bälle der Größe nach geordnet: $r_{n+1} \leq r_n$. Wir wählen rekursive Bälle aus und beginnen mit $B_{r_1}(x_1)$. Wenn wir m Bälle ausgewählt haben wählen wir als nächstes den nächsten Ball, der die davor ausgewählten nicht schneidet.

Sei jetzt $B_{r_n}(x_n)$ ein nicht ausgewählter Ball. Da er nicht ausgewählt wurde, hat er mit einem der vorher ausgewählten Bälle einen nichtleeren Schnitt, den wir mit $B_{r_{n_j}}(x_{n_j})$ bezeichnen. Dessen Radius ist mindestens r_n, da sonst $B_{r_n}(x_n)$ ausgewählt worden wäre.

Dann ist $B_{r_n}(x_n) \subset B_{r_{n_j}}(x_{n_j})$. $\square$

Lemma 3.7. *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$, offen und $r_0 > 0$. Dann existiert eine Folge disjunkter Bälle $B_{r_n}(x_n)$ in U so dass $B_{3r_n}(x_n) \subset U$,*

$$m(U \backslash B_{r_n}(x_n)) = 0$$

und $r_j \leq r_0$.

Beweis. Zunächst sei U beschränkt. Wir werden zeigen: Es existiert $\theta > 0$ und eine endliche Menge disjunkter Bälle $B_{r_n}(x_n)$ $1 \leq n \leq N$, so dass

$r_n \leq r_0$, $B_{3r_n}(x_n) \subset U$ und

$$m(\bigcup_{n=1}^{N}(B_{r_n}(x_n))) \geq \theta m(U).$$

Daraus folgt die Aussage mit folgenden Argument: Wir definieren

$$U_1 = U \backslash \bigcup_{n=1}^{N} \overline{B_{r_n}(x_n)}.$$

Dann folgt

$$m(U_1) = m(U) - m(\bigcup_{n=1}^{N} \overline{B_{r_n}(x_n)}) = m(U) - m(\bigcup_{n=1}^{N} B_{r_n}(x_n)) \leq (1-\theta)m(U)$$

da $m(B_r(x)) = m(\overline{B_r(x)})$. U_1 ist offen, und wir wenden die Aussage augf U_1 an. Rekursiv erhalten wir U_m mit

$$m(U_M) \leq (1-\theta)^m m(U)$$

und wir erhalten die gewünschte Folge von disjunkten Bällen.

Sei $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge mit $m(K) > m(U)/2$. Die Bälle

$$B_{\mathrm{dist}(x,\mathbb{R}^d \backslash U)/3}(x)$$

überdecken K. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung. Mit Lemma 3.6 wählen wir N disjunkte Bälle $B_{r_n}(x_n)$ aus mit

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{3r_n}(x_n).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} m(U)/2 \leq m(K) \leq & m(\bigcup_{n=1}^{N} B_{3r_n}(x_n)) \\ \leq & \sum_{n=1}^{N} m(B_{3r_n}(x_n)) \\ = & 3^d \sum_{n=1}^{N} m(B_{r_n}(x_n)) \\ = & 3^d m\Big(\bigcup_{n=1}^{N} B_{r_n}(x_n)\Big). \end{aligned}$$

und wir erhalten die Aussage mit $\theta = \frac{1}{2}3^{-d}$. □

3. Schritt. Wir zeigen: Für jede offene Menge U und $\delta > 0$ gilt $\mathcal{H}^d_\delta(U) \leq m_*(U)$.

Nach Lemma 3.7 existierten disjunkte Bälle $B_{r_n}(x_n) \subset U$ so dass $r_n \leq r_0$ und mit $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n)$ und $W = U \backslash V$

$$m(W) = 0.$$

Daher ist auch $\mathcal{H}^d(W) = 0$ und für $\varepsilon > 0$ existiert eine Überdeckung mit $\operatorname{diam} A_n < \delta$ und

$$W \subset \bigcup A_i, \qquad c_d \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_n)/2)^d < \varepsilon.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^d_\delta(U) \leq & c_d \Big(\sum_{n=1}^{\infty} r_n^d + \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_n)/2)^d \Big) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} m(B_{r_n}(x_n)) + \varepsilon \\
= & m(V) + \varepsilon \\
= & m(U) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

4. Schritt Jede Lebesguemenge A ist Hausdorffmessbar.

Ist A eine Lebesguemenge, so existieren zwei Borelmengen $A_0 \subset A \subset A_1$ mit $m(A_1 \backslash A_0) = 0$. Damit ist $A = A_0 + A \backslash A_0$. Die Menge A_0 ist eine Borelmenge, und daher Hausdorffmessbar. $A \backslash A_0$ ist eine Lebesguenullmenge, daher eine Hausdorffnullmenge und Hausdorffmessbar. Also ist A Hausdorffmessbar. Die Aussage über das Maß folgt.

5. Schritt Jede Hausdorffmessbare Menge A ist eine Lebesguemenge und $m(A) = \mathcal{H}^d(A)$

Es genügt, Hausdorffmessbare Mengen mit endlichen Hausdorffmass zu betrachten. Zu $\varepsilon > 0$ existiert eine Überdeckung mit offenen Mengen A_n und

$$c_d \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{diam} A_n/2)^d < \mathcal{H}^d(A) + \varepsilon.$$

Sei $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Diese Menge ist offen und

$$m_*(V \backslash A) \leq \mathcal{H}^d(V \backslash A) = \mathcal{H}^d(U) - \mathcal{H}^d(A) < \varepsilon$$

und A ist eine Lebesguemenge.

Sei jetzt A eine Lebesguemenge von endlichen Maß, $\varepsilon > 0$ und U offen, so dass $A \subset U$ und $m(U \backslash A) < \varepsilon$. Dann folgt

$$\Big| m(A) - \mathcal{H}^d(A) \Big| = \Big| m(U) - m(U \backslash A) - (\mathcal{H}^d(U) - \mathcal{H}^d(A)) \Big|$$
$$= \Big| m(U \backslash A) - \mathcal{H}^d(U \backslash A) \Big| \leq c_2 2^{-d} d^{d/2} \varepsilon.$$

Die Aussage folgt mit $\varepsilon \to 0$.

□

[25.10.2018]

[30.10.2018]

3.4. **Die Cantormengen $C_{2/3}$.** Wir betrachten die sogenannte Cantor 2/3 Menge. Dazu schreiben wir Zahlen x zwischen 0 und 1 als Dezimalbruch zur Basis 3,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} = (0, a_1 a_2 \dots)_3$$

wobei $a_j \in \{0,1,2\}$. Diese Darstellung ist nicht eindeutig, aber sie wird eindeutig, wenn wir verlangen, dass immer wieder 0 und 1 auftaucht.

Definition 3.5. *Die 2/3 Cantormenge $C_{2/3}$ besteht aus den Zahlen in $[0,1]$, für die $a_j \in \{0,2\}$ gewählt werden kann.*

Eigenschaften:

(1) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \in C_{2/3}$:

$$\frac{1}{3} = (0, 0\overline{2})_{(3)}, \frac{2}{3} = (0,2)_{(3)}$$

$$1 = (0, \overline{2})_3$$

(2) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cap C_{2/3} = (0)$.

(3) $C_{2/3}$ ist perfekt:

- Die Menge ist abgeschlossen. Das folgt aus der Beobachtung: Ist

$$x = (0, a_1 \dots)_{(3)}$$

und

$$y = (0, b_1, \dots)_{(3)}$$

mit $a_n, b_n \in \{0,2\}$ und $a_N \neq b_N$ für ein N, so ist

$$|x-y| \geq 3^{-N}.$$

Daher konvergieren alle Ziffern wenn $x_n \in C_{2/3}$ falls $(x_n)_n$ konvergiert, und damit ist der Limes in $C_{2/3}$.

- $C_{2/3}$ enthält kein Intervall, da es sonst ein Intervall der Form $(l3^{-k}, (l+1)3^{-k})$ enthalten müsste. Die Darstellung zur Basis 3 von $l3^{-k} + \frac{1}{2}3^{-k-1}$ ist an der $k+1$ und $k+2$ten Stelle 1 also nicht in $C_{2/3}$ enthalten.
- Jeder Punkt $x \in C_{2/3}$, der sich nicht als endlicher Tertiärbruch schreiben läßt, ist Häufungspunkt, da die Reihe konvergiert. Sei jetzt $x = (0, a_1 \dots a_n \overline{0})_{(3)}$. Dann ist $x + 3^{-m} \in C_{2/3}$ for $m > n$. Die Folge konvergiert gegen x.

(4) Rationale Zahlen sind dicht in $C_{2/3}$.

(5) Die Multiplikation mit 3 definiert eine bijektive Abbildung

$$C_{\frac{2}{3}} \cap [0, \frac{1}{3}] \to C_{2/3}$$

und $x \to 3x - 2$ definiert eine bijektive Abbildung

$$C_{\frac{2}{3}} \cap [2/3, 1] \to C_{2/3}.$$

Beide Abbildungen werfen die erste Ziffer weg, und verschieben den Rest nach links.

Satz 3.8.
$$\mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(C_{2/3}) = 2^{-\ln 2/\ln 3} c_{\ln 2/\ln 3}$$

Beweis. **1. Schritt.** Ist $\delta > 3^{-k}$, so können wir $C_{2/3}$ mit 2^k Mengen der Länge 3^{-k} überdecken. Also ist
$$\mathcal{H}^\alpha(C_{2/3}) \le c_\alpha 2^k 3^{-k\alpha} = c_\alpha \exp(k(\ln 2 - \alpha \ln 3)$$
und mit $\alpha = \ln 2/\ln 3$
$$\mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(C_{2/3}) \le 2^{-\ln 2/\ln 3} c_{\ln 2/\ln 3}$$
2. Schritt. Für $\varepsilon > 0$ sei jetzt
$$C_{2/3} \subset \bigcup I_n$$
mit offenen Intervallen I_n und
$$c_\alpha \sum_{n=1}^\infty |I_n/2|^\alpha < \mathcal{H}^\alpha(C_{[2/3)}) + \varepsilon$$
Da $C_{3/2}$ kompakt ist dürfen wir annehmen, dass die Uberdeckung endlich ist, also
$$C_{2/3} \subset \bigcup_{n=1}^N (a_n, b_n),$$
$a_{n+1} > a_n$ und $b_{n+1} > b_n$ für alle n (wir verzichten auf Intervalle, die komplett in anderen enthalten sind) und
$$c_{\ln 2/\ln 3} \sum_{n=1}^N (b_n - a_n)^{\ln 2/\ln 3} \le \mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(C_{2/3}) + \varepsilon.$$
Wir dürfen annehmen, dass $b_n < a_{n+1}$. Wäre $a_{n+1} < b_n$, so enthielte das Intervall (a_{n+1}, b_n) ein x im Komplement von $C_{2/3}$, das offen sit, und wir finden $\tilde b_n < \tilde a_n$ wählen, so dass die modifizierten Intervalle mit $(a_n, \tilde b_n)$ und $(\tilde a_{n+1}, b_{n+1}$ statt (a_n, b_n) und (a_{n+1}, b_{n+1}) wieder $C_{2/3}$ überdecken. Da $C_{2/3}$ abgeschlossen ist, können wir im Fall $a_{n+1} = b_n$ genauso argumentieren.

Wir dürfen also annehmen, dass die Intervalle disjunkt sind. Ist $x \in \mathbb{R}\backslash C_{2/3}$, so ist der nächste Punkt in $C_{2/3}$ einer mit endlichen Tertiärbruch, da es bei einem Element mit nicht abbrechendem Tertiärbruch rechts und links in beliebig kleiner Umgebung Punkte in $C_{2/3}$ gibt.

Wir können also Intervalle der Form
$$I_n = [l_n, r_n]$$
mit Zahlen $l_n, r_n \in 3^{-k}\mathbb{Z}$ und
$$0 = l_1 < r_1 < l_2 < \cdots < r_N = 1.$$
Wir betrachten eines der Intervalle I_n und wollen zeigen, dass wir es durch die Vereinigung von Intervallen der Länge 3^k schreiben können, ohne die Summe zu vergrößern.

Ist $3^m < r_n - l_n$, so dürfen wir annehmen, dass $[l_n, r_n]$ ein offenes Intervall (a, b) der Länge 3^m aus dem Komplement enthält - sonst verkleinern wir das Intervall. Wir wählen m maximal. Genauso dürfen wir annehmen, dass $a - l_n \le 3^m$ und $r_n - b \le 3^m$ da $3^m \ge (b-a)/3$.

Es folgt

$$(a-l_n)^{\ln 2/\ln 3}+(r_n-b)^{\ln 2/\ln 3}\le (r_n-l_n)^{\ln 2/\ln 3}$$

da für $b\le x\le r_n$

$$\frac{d}{dx}(x-b)^{\ln 2/\ln 3}\ge \frac{d}{dx}(x-l_n)^{ln2/\ln 3}$$

und damit

$$(r_n-b)^{\ln 2/\ln 3}-(r_n-l_n)^{\ln 2/\ln 3}\le 3^{m\ln 2/\ln 3}-(b+3^m-l_n)^{\ln 2/\ln 3}$$

und genauso

$$(a-l_n)^{\ln 2/\ln 3}+3^{m\ln 2/\ln 3}-(b+3^m-l_n)^{\ln 2/\ln 3}\le 23^{m\ln 2/\ln 3}-3^{(m+1)\ln 2/\ln 3}=0.$$

Rekursiv dürfen wir also annehmen, dass alle Intervalle die Länge 3^k haben. Im ersten Schritt haben wir diesen Fall betrachtet. □

[30.10.2018]

[06.11.2018]

Wir beschliessen diesen Abschnitt mit der Konstruktion einer speziellen Funktion, deren Graph Teufelstreppe genannt wird.
Wir definieren $\phi:[0,1]\to[0,1]$ durch

$$\phi((0,a_1a_2\dots)_{(3)})=\sum_{j=1}^{N}(a)a_j/22^{-j}$$

wobei wir die Darstellung durch einen endlichen Tertiärbruch vermeiden und stattdessen die Periode $\overline{2}$ wählen. Hier ist N die größte natürliche Zahl ist, so dass $a_j\ne 1$ für $1\le j\le N$. Es gilt

(1) ϕ ist konstant auf Intervallen der Form

$$[(0,a_1a_2\dots a_k\overline{0})_3,(0,a_1a_2\dots a_k1\dots 0)]$$

(2) Da $m(C_{2/3})=0$ ist das Lebesguemaß des Komplements in $[0,1]$ 1.
(3) ϕ ist stetig. Genauer gilt

$$|\phi(x)-\phi(y)|\le|x-y|^{\ln 2/\ln 3}.$$

Genauer gilt für $x>y$

$$\phi(x)-\phi(y)=\mathcal{H}^{\ln 2/\ln 3}(C_{2/3}\cap[x,y])$$

da diese Aussage für endliche Tertiärbrüche gilt. Damit folgt die Aussage aus dem Beweis des vorigen Satzes.
(4) ϕ ist surjektiv, da wir leicht die Urbilder von beliebigen Zahlen in der Binärdarstellung finden.
(5) $\phi|\hat{C}_{2/3}:\hat{C}_{2/3}\to[0,1]$ ist bijektiv. Hier ist $\hat{C}_{2/3}$ die Teilmenge, bei der wir die linken Endpunkte entfernen.

4. Das Lebesgueintegral

In diesem Kapitel ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir schreiben $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit offensichtlichen Rechenregeln für $\pm\infty$. Wir setzen $0\infty = 0$.

Definition 4.1. *Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt messbar, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}((t, \infty) \cup \infty) \in \mathcal{A}$ messbar ist.*

Wir halten erste Eigenschaften fest.

(1) Stetige Funktionen auf einem metrischen Raum sind Borelmessbar.
(2) Die Urbilder von Borelmengen sind messbar: Sei

$$\mathcal{B} = \{B : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Dann enthält $\mathcal{B}$ die leere Menge und alle Intervalle der Form $(t, \infty) \cup \{\infty\}$. Mit B enthält $\mathcal{B}$ auch $\overline{\mathbb{R}} \backslash B$ und mit B_n auch deren abzählbare Vereinigung. $\mathcal{B}$ ist also eine σ Algebra, die alle offenen Intervalle und damit alle offenen Mengen in $\mathbb{R}$ enthält, und damit auch alle Borelmengen.
(3) Die Abbildung

$$[0, \infty) \ni t \to \mu(\{x : f(x) > t\}) \in [0, \infty]$$

ist monoton fallend.

Definition 4.2 (Lebesgueintegral)**.** *Sei $f : X \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ messbar. Wir definieren*

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) dt \in [0, \infty) \cup \{\infty\}.$$

Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und gilt entweder

$$\int_X \max\{f, 0\} d\mu < \infty$$

oder

$$\int_X \max\{-f, 0\} d\mu < \infty$$

so definieren wir

$$\int f d\mu = \int \max\{f, 0\} d\mu - \int \max\{-f, 0\} d\mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Wir nennen f integrierbar, falls beide Integrale endlich sind.

Bemerkungen: Jede beschränkte monotone Funktion auf einem kompakten Intervall ist Riemann integrierbar. Ist $f : X \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ messbar und

$$\mu(\{x : f(x) > t\}) = \infty$$

für ein t so setzen wir $\int f d\mu = \infty$. Im anderen Fall existiert das Riemann-integral $\int_a^b \mu(\{x : f(x) > t\}) dt$ für $0 < a < b < \infty$ und wir definieren das Integral als das uneigentliche Integral

$$\lim_{a \to 0, b \to \infty} \int_a^b \mu(\{x : f(x) > t\}) dt.$$

Wir betrachen $f : \mathbb{R}^d \to (0,1]$, $f(x) = e^{-|x|^2}$. Diese Funktion ist stetig und daher Lebesgue messbar. Für $0 < t < 1$ ist

$$\{x : f(x) > t\} = B_r(0)$$

mit $r = \sqrt{-\ln(t)}$. Da

$$m(B_r(0)) = m(B_1(0))r^d$$

folgt der Definition und der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2} m =& m(B_1(0) \int_0^1 (-\ln(t))^{d/2} dt \\ =& m(B_1(0)) \int_0^\infty s^{\frac{d}{2}} e^{-s} ds \\ =& m(B_1(0)) \Gamma\Big(\frac{d+2}{2}\Big). \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1. **Messbare Funktionen.**

Satz 4.1. *Die messbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum. Summen und Produkte zweier messbarer Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ sind messbar. Ist I ein offenes Intervall und $f : X \to I$ messbar und $\phi \in C(I; \mathbb{R})$ so ist $\phi \circ f$ messbar. Seien $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind $x \to \sup_n f_n(x)$, $x \to \inf_n f_n(x)$ und $x \to \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ messbar. Insbesondere folgt für*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

unter der Annahme, dass der Limes für alle x existiert, dass f messbar ist.

Beweis. Seien f, g messbar und $t \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\{x : f(x)+g(x) > t\} = \bigcup_{m=0}^\infty \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big\{x : f(x) > n/(m+1), g(x) > t - n/(m+1)\Big\}.$$

Damit ist die Summe messbarer Funktionen messbar. Da Vielfache messbarer Funktionen trivialerweise messbar ist, bilden diese Funktionen einen Vektorraum. Da für $t > 0$

$$\begin{aligned} \{f(x)g(x) > t\} = \bigcup_{m=0}^\infty \bigcup_{n=0}^\infty \Big\{ & x \in X : f(x) > \frac{n+1}{m+1}, g(x) > \frac{t(m+1)}{n+1} \\ & \text{oder } f(x) < -\frac{n+1}{m+1}, g(x) < -\frac{t(m+1)}{n+1} \Big\} \end{aligned}$$

ist diese Menge messbar. Das Argument läßt sich leicht für $t = 0$ und $t < 0$ modifizieren. Die Messbarkeit der Komposition folgt sofort, da $\phi^{-1}((t,\infty))$ offen ist für stetige Abbildungen ϕ.

Seien $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{x : \sup_n f_n(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x : f_n(x) > t\},$$

$$\{x : \inf_n f_n(x) > t\} = \bigcap_{n=1}^\infty \{x : f_n(x) > t\}$$

$$\left\{x : \limsup_{n\to\infty} f_n(x) > t\right\} = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty \{x : f_n(x) > t\}$$

und

$$\left\{x : \liminf_{n\to\infty} f_n(x) > t\right\} = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m=n}^\infty \{x : f_n(x) > t\}.$$

und damit sind diese Funktionen messbar. Falls der Limes für x existiert, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

□

[06.11.2018]

[08.11.2018]

Definition 4.3. *Wir sagen, eine mit $x \in X$ parametrisierte Aussage gilt μ fast überall, falls eine μ Nullmenge N existiert, so dass die Aussage für alle $x \in X\backslash N$ gilt. Sind f, g messbare Funktionen, so sagen wir*

$$f = g \qquad \textit{fast überall}$$

falls eine Nullmenge existiert, ausserhalb derer $f(x) = g(x)$ gilt.

Satz 4.2. *Wir betrachten die Äuivalenzklassen messbarer Funktionen, für die $|f(x)| < \infty$ fast überall ist, bzgl der Relation $f = g$ fast überall. Diese Äquivalenzklassen bilden einen reellen Vektorraum.*

Beweis. Die Beziehung $f = g$ fast überall definiert eine Äquivaenzrelation messbarer Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Sei f wie im Satz, d.h. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar und $N_f = \{x : |f(x)| = \infty\}$ ist eine Nullmenge. Wir definieren

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \notin N_f \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $\tilde f = f$ fast überall und $\tilde f$ ist messbar. Jede Äquivalenzklasse hat also einen Vertreter, der Werte in $\mathbb{R}$ annimmt.

Nach Satz 4.1 sind $\lambda \tilde f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\tilde f + \tilde g$ messbae und $\tilde f \tilde g$, $\lambda \tilde f = \lambda f$, $\tilde f + \tilde g = f + g$ und $\tilde f \tilde g = fg$ außerhalb von der Nullmenge $N_f \cup N_g$. Wir definieren die Summe der Äquivalenzklassen als die Äquivalenzklasse von $\tilde f + \tilde g$ und genauso das Produkt. Damit bilden die Äquivalenzklassen einen reellen Vektorraum.

□

Definition 4.4. *Eine einfache Funktion ist eine messbare Funktion, die beschränkt ist und nur endlich viele Werte annimmt.*

Lemma 4.3. *Sei $f : X \to [0,\infty) \cup \{\infty\}$ messbar. Dann existiert eine Folge von einfachen Funktionen f_n mit*

$$0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le f(x)$$

und

$$f_n(x) \to f(x)$$

für alle $x \in X$. Die einfachen Funktionen bilden einen Vektorraum. Produkte einfacher Funktionen sind einfach.

Beweis. Wir definieren

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 2^n & \text{falls } f(x) \geq 2^n \\ \frac{[2^n f(x)]}{2^n} & \text{falls } 0 \leq f(x) \leq 2^n \end{array} \right.$$

Dann nimmt $f_n(x)$ nur n^2 Werte an. Die Funktion ist messbar. Ist $f(x) < \infty$ und $2^n \geq f(x)$ so folgt für alle x und n

$$f(x) - 2^{-n} \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x).$$

Die Aussagen über Summen und Produkte einfacher Funktionen sind offensichtlich. $\square$

Wir betrachten nun metrische Räume (X, d) und $\mathcal{B}$ die Menge der Borelmengen.

Satz 4.4 (Egorov)**.** *Sei $\mathcal{B}$ die Menge der Borelmengen auf $\mathbb{R}^d$ und μ ein Borelmaß, für das $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen, die fast überall $< \infty$ ist und*

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty) \qquad \mu \text{ fast überall in } \mathbb{R}^d.$$

Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset E$ so dass $m(E \backslash K) < \varepsilon$ und $f_n|_K \to f|_K$ gleichmässig.

Beweis. Da eine Nullmenge für die Aussage irrelevant ist, dürfen wir annehmen, dass $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Sei $\varepsilon > 0$. Da

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^d : \sup_{n \geq N} |f_n(x) - f(x)| < 1/m\} \subset \{\ \}$$

existiert N_m so dass

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : \sup_{n \geq N_m} |f_n(x) - f(x)| > 1/m\}) < 2^{-1-m}\varepsilon$$

Dann existiert nach Lemma 3.3 eine kompakte Menge $K_m \subset \mathbb{R}^d$ so dass

$$\mu(\mathbb{R}^d \backslash K_m) < 2^{-m}\varepsilon$$

und

$$|f_n(x) - f(x)| < 1/m \qquad \text{für } x \in E_m \qquad \text{und } n > N_m$$

Wir definieren

$$K = \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$$

und erhalten

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

für $x \in K$ und $n > N_m$, K ist kompakt und

$$\mu(\mathbb{R}^d \backslash K) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(\mathbb{R}^d \backslash K_m) < \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\varepsilon = \varepsilon.$$

$\square$

Dieses Lemma hat Konsequenzen für das Lebesguemaß. Ist E eine Borelmenge in $\mathbb{R}^d$ mit $m^d(E) < \infty$, so definiert

$$\mu(A) = m^d(E \cap A)$$

ein Borelmaß mit diesen Eigenschaften.

Satz 4.5 (Lusin)**.** *Sei μ wie oben und f eine Borelmessbare Funktion, die fast überall endlich ist. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Teilmenge K_ε mit $\mu(\mathbb{R}^d \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ so dass $f|_{K_\varepsilon}$ stetig ist.*

Beweis. Es genügt, eine nichtnegative Funktion zu betrachten. Dann existiert eine Folge von einfachen Funktionen f_n, die fast überall gegen f konvergiert. Wir dürfen annehmen, dass sie überall gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Satz von Egorov existiert eine kompakte Menge $K_0 \subset E$ mit $\mu(E \backslash K_0) < \varepsilon/2$ so dass $f_n \to f$ gleichmässig auf K_ε. Jede einfache Funktion ist eine Summe von Vielfachen von charakteristischen Funktionen disjunkter Mengen,

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{N} a_{m,n} \chi_{A_{m,n}}$$

mit $A_{n,m}$ messbar und $A_{n,m} \cap A_{n,m'} = \{\}$ falls $m \neq m'$. Sei

$$A_{n,0} = \mathbb{R}^d \backslash \bigcup_{m>0} A_{n,m}.$$

Dann existieren nach Lemma 3.3 kompakte Mengen $K_{n,m} \subset A_{n,m}$ mit

$$\mu(A_{n,m} \backslash K_{n,m}) < 2^{-2-n-m} \varepsilon.$$

Dann ist

$$K_n := \bigcup_{m=1}^{M_n} K_{nm}$$

kompakt, $\mu(\mathbb{R}^d \backslash K_n) < 2^{-1-n}\varepsilon$ und f_n ist stetig auf K_n. Sei

$$K = K_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Dann ist $\mu(E \backslash K) < \varepsilon$, $f_n \to f$ gleichmässig auf K und $f_n|_K$ ist stetig. Damit ist $f|_K$ stetig als gleichmässiger Limes stetiger Funktionen auf dem metrischen Raum K. □

4.2. **Das Integral.** Wir beginnen mit Betrachtungen des uneigentlichen Riemannintegrals von monoton fallenden Funktionen. Im Folgenden seien

$$\theta, \theta_n : (0, \infty) \to [0, \infty) \cup \{\infty\}.$$

Dann ist

$$\int_0^\infty \theta(t) dt \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

wohldefiniert. Wir erhalten sicher ∞, falls $\theta(t) = \infty$ für ein t.

Lemma 4.6. *Ist $n \to \theta_n(t)$ monoton wachsend und*

$$\theta_n(t) \to \theta(t)$$

für alle $t \in (0, \infty)$ so folgt

$$\int_0^\infty \theta_n(t)dt \to \int_0^\infty \theta(t)dt.$$

Beweis. Es gilt immer

$$\int_a^b \theta_n(t)dt \leq \int_a^b \theta(t)dt$$

und, mit einer äquidistanten Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots t_M = b$,

$$\sum_{m=1}^M \frac{b-a}{M}\theta_n(t_m) \leq \int_a^b \theta_n(t)dt \leq \sum_{m-1}^M \frac{b-a}{M}\theta_n(t_{m-1})$$

mit

$$\sum_{m-1}^M \frac{b-a}{M}\theta_n(t_{m-1}) - \sum_{m=1}^M \frac{b-a}{M}\theta_n(t_m) = \frac{b-a}{M}(\theta_n(a) - \theta_n(b)) \leq \frac{b-a}{M}\theta(a)$$

und die gleiche Abschätzung gilt für θ. Wir nehmen an, dass

$$\int_0^\infty \theta(t)dt < \infty,$$

im anderen Fall führt eine Variation des Arguments zum Ziel. Sei $\varepsilon > 0$. Da das uneigentliche Integral existiert, existieren $0 < a < b < \infty$ so dass

$$\int_0^\infty \theta(t)dt - \int_a^b \theta(t)dt < \varepsilon/3.$$

Wir wählen M so dass

$$\frac{b-a}{M}\theta(t) < \theta/3$$

und N mit

$$\sum_{m=1}^M \frac{b-a}{M}(\theta(t_m) - \theta_n(t_m)) < \varepsilon/3$$

für $n \geq N$. Dann ist für diese n

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \theta(t)dt &\geq \int_0^\infty \theta_n(t)dt \\ &\geq \int_a^b \theta_n(t)dt \\ &\geq \sum_{m=1}^M \frac{b-a}{M}\theta_n(t_m) \\ &\geq \sum_{m=1}^M \frac{b-a}{\theta}(t_m) - \varepsilon/3 \\ &\geq \int_a^b \theta(t)dt - 2\varepsilon/3 \\ &> \int_0^\infty \theta(t)dt - \varepsilon.\end{aligned}$$

□

[08.11.2018]

[13.11.2018]

Als Konsequenz erhalten wir Konvergenzsätze für das Lebesgueintegral. Wir beobachten zunächst: Sind $0 \leq f \leq g$ beide integrierbar, so folgt

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Sei f eine nichtnegative messbare Funktion. Dann gilt die Tschebyscheffsche Ungleichung: Für $t > 0$ ist

$$\mu(\{x : f(x) > t\}) \leq \frac{1}{t} \int f d\mu \tag{4.2}$$

Satz 4.7 (Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz)**.** *Es seien $f_n : X \to \overline{R}$ messbare nichtnegative Funktionen mit*

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

und

$$f_n(x) \to f(x) \qquad \text{für } n \to \infty$$

fast überall. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Beweis. Nach Satz 4.1 ist f messbar. Da

$$\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x : f_n(x) > t\}$$

folgt

$$\mu(\{x : f_n(x) > t\}) \leq \mu(\{x : f(x) > t\}) = \lim_{m\to\infty} \mu(\{x : f_m(x) > t\}.$$

Wir definieren

$$\theta_n(t) = \mu(\{x : f_n(x) > t)\}).$$

Diese Funktionen konvergieren monoton gegen $\theta(t)$,

$$\theta_n(t) = \mu(\{x : f(x) > t)\}),$$

woraus mit Lemma 4.6

$$\int f_n d\mu = \int_0^\infty \theta_n(t)dt \to \int_0^\infty \theta(t)dt = \int f d\mu$$

folgt. □

Satz 4.8 (Das Lemma von Fatou)**.** *Seien $f_k : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und nichtnegativ. Dann ist*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f d\mu$$

Beweis. Wir definieren

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

und

$$g_N(x) = \inf_{n\ge N} f_n(t)$$

Nach Satz 4.1 sind alle Funktionen messbar,

$$0 \le g_n(x) \le g_{n+1}(x) \to f(x)$$

für alle $x \in X$. Nach dem Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz folgt

$$\int g_N d\mu \to \int f d\mu \qquad \text{für } N \to \infty.$$

Nach Definition ist $g_N(x) \le f_n(x)$ für $n \ge N$ und damit

$$\int f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int g_N d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

□

Satz 4.9 (Dominierte Konvergenz, Satz von Lebesgue)**.** *Sei g integrierbar f, f_n messbar , $f_n \to f$ und $|f_n| < g$ fast überall für alle n. Dann sind die Funktionen f_n und f integrierbar und es gilt*

$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu$$

Die Funktion g heißt Majorante.

Beweis. Da $f_n \to f$ fast überall genau dann wenn

$$\max\{f_n, 0\} \to \max\{f, 0\}$$

und

$$\max\{-f_n, 0\} \to \max\{-f, 0\}$$

fast überall genügt es, nichtnegative Funktionen zu betrachten. Es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

fast überall. Nach dem Lemma von Fatou folgt

$$\int f d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen wählen wir $\varepsilon > 0$ und $0 < a < b < \infty$ so dass

$$\int_0^\infty \mu(\{x : g(x) > t\})dt \leq \int_a^b \mu(\{x : g(x) > t\})dt + \varepsilon/4$$

was aufgrund der Konvergenz des uneigentlichen Integrals möglich ist. Sei

$$A : \{x : a < g(x) < b\}$$

Dann ist $\mu(A) < \infty$, die Funktionen f_n sind auf A fast überall durch b beschränkt und

$$\int \chi_{X\setminus A} f_n d\mu < \varepsilon/4,$$

sowie

$$\int \chi_{X\setminus A} f d\mu < \varepsilon/4.$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt, wenn wir zeigen

$$\limsup_{n\to\infty} \int \chi_A f_n d\mu \leq \int \chi_A f d\mu. \tag{4.3}$$

Mit der monotonen Konvergenz gilt

$$\int (b - f) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int \chi_{X\setminus A}(b - f_n) d\mu. \tag{4.4}$$

Da

$$\{x \in A : b - f(x) \geq t\} = A \setminus \{x \in A : f(x) > b - t\},$$

daher

$$\mu(\{x \in A : b - f(x) \geq t\}) = \mu(A) - \mu(\{x \in A : f(x) > b - t\})$$

und (die erste Gleichung ist eine Übungsaufgabe)

$$\begin{aligned}
\int \chi_A (b - f) d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{x \in A : b - f(x) > t\})dt \\
&= \int_0^\infty \mu(\{x \in A : b - f(x) \geq t\})dt \\
&= b\mu(A) - \int_0^b \mu(\{x \in A : f(x) > t\})dt \\
&= b\mu(A) - \int \chi_A f d\mu.
\end{aligned}$$

Genauso argumentieren wir mit f_n. Mit (4.4) folgt (4.3). □

Lemma 4.10. *$f : X \to \overline{R}$ sei integrierbar, A_n messbar und disjunkt, sodass*

$$X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$$

dann gilt

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int \chi_{A_n} f d\mu$$

Wir schreiben
$$\int_A f d\mu$$
für
$$\int \chi_A f d\mu.$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für nichtnegative Funktionen f_n zu zeigen. Da
$$\{x : f(x) > t\} = (\{x : f(x) > t\} \cap A) \cup (\{x : f(x) > t\} \cap B)$$
für $X = A \cup B$, A, B disjunkt und messbar folgt
$$\int f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$
und allgemeiner für disjunkte Mengen A und B
$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$
Sei jetzt
$$f_n = \chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n} f.$$
Mit dem Satz von Beppo Levi folgt
$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int A_j f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} d\mu.$$
□

Lemma 4.11. *Für integierbare einfache Funktionen f und g ist $f + g$ integrierbar und es gilt*
$$\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$
Seien A_n messbar, $\mu(A_n) < \infty$ und $\lambda_n \in \mathbb{R}$ für $1 \le n \le N$. Dann ist
$$\int \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \mu(A_n)$$

Beweis. Wir zerlegen
$$X = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$$
sodass die A_n paarweise disjunkt sind, und sowohl f wie auch g auf A_n konstant sind. Nach Lemma 4.10 genügt es, das Integral über ein A_n zu betrachten. Wir dürfen also annehmen, dass f und g Vielfache einer festen charakterischen Funktion sind. Dieser Fall ist trivial. Die zweite Aussage folgt mit Induktion über N und dem ersten Teil. □

Satz 4.12. *Seien f, g integrierbar. Dann existiert eine Nullmenge N so dass $|f(x)| < \infty$ und $|g(x)| < \infty$ für $x \in X \backslash N$. Die Funktion*
$$F(x) := \begin{cases} 0 & \textit{falls } x \in N \\ f(x) + g(x) & \textit{falls } x \in X\backslash N \end{cases}$$

ist integrierbar und es gilt

$$\int F d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Beweis. Ohne Einschränkung seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ und $F = f + g$. Dann sind $|f|$ und $|g|$ integrierbar. Da

$$\{x||F(x)| > t\} \subset \{x||f(x)| > t/2\} \cup \{x||g(x)| > t/2\}$$

folgt

$$\begin{aligned}\int |F(x)| d\mu \leq & \int_0^\infty \mu(\{x||f(x)| > t/2\})dt + \int_0^\infty \mu(\{x||g(x)| > t/2\})dt \\ =& 2\int_0^\infty \mu(\{x||f(x)| > t\})dt + 2\int_0^\infty \mu(\{x||g(x)| > t\})dt \\ =& 2\int |f|d\mu + 2\int |g|d\mu.\end{aligned}$$

Daher ist F integrierbar. Es existieren einfache Funktionen $f_n \to f$, $g_n \to g$ mit $|f_n| \leq |f|$ und$|g_n| \leq |g|$. Nun gilt

$$\int f + g d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n + g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n d\mu + \int g_n d\mu \right) = \int f d\mu + \int g d\mu$$

wobei die erste und die letzte Gleichheit aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue mit den Majoranten $|f|$, $|g|$ und $|F|$, und die mittlere aus Lemma 4.11 folgt. □

Definition 4.5. *Wir definieren $L^1(X, \mu)$ als die Äquivalenzklassen integrierbarer Funktionen mit der Norm*

$$\|\tilde{f}\|_{L^1(X,\mu)} = \int |f| d\mu.$$

wobei f ein beliebiges Element der Äquivalenzklasse ist.

Da

$$|f(x)| = \max\{f(x), 0\} + \max\{-f(x), 0\}$$

ist das Integral rechts für jede integrierbare Funktion endlich. Der Wert ist für alle Elemente der Äquivalenzklasse gleich und daher aus der Äquivalenzklasse wohldefiniert. Offensichtlich ist $|f(x) + g(x)|$ messbar. Da

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

folgt

$$\int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu$$

und

$$\int |\lambda f| d\mu = |\lambda| \int |f| d\mu.$$

Nichtnegativität ist offensichtlich. Da

$$\int |f| d\mu = 0$$

impliziert $|f(x)| = 0$ fast überall erhalten wir die Normeigenschaft.

Satz 4.13. *$L^1(X,\mu)$ ist ein Banachraum, d.h. ein vollständiger normierter Vektorraum.*

[13.11.2018]

[15.11.2018]

Beweis. Es sei $\tilde f_n$ eine Cauchyfolge von Äquivalenzklassen und f_n eine Folge von Elementen der Äquivalenzklassen. Es genügt, Konvergenz einer Teilfolge zu zeigen und wir dürfen annehmen, dass

$$\|\tilde f_{n+1} - \tilde f_n\| < 2^{-n}.$$

Sei

$$g_n = |f_0| + \sum_{k=1}^n |f_n - f_{n-1}|$$

und

$$g(x) = |f_0| + \sum_{k=1}^\infty |f_n - f_{n-1}|.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi ist

$$\int g d\mu = \lim_{n\to\infty} \int |f_0| + \sum_{k=1}^n |f_k - f_{k-1}| d\mu \le \|f_0\|_{L^1(X,\mu)} + \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} < \infty$$

und g ist integrierbar und

$$g_n \to g$$

fast überall. Da für $m > n$

$$|f_m - f_n| \le g - g_n$$

konvergiert f_n fast überall. Sei f der Limes, falls f_n konvergiert, und $f = 0$ sonst. Dann konvergiert $f_n \to f$ fast überall, und damit auch $|f_n| \to |f|$ fast überall. Da

$$|f_n| \le g_n \le g$$

und $f_n \to f$ fast überall ist g eine integrierbare Majorante von f_n. Daher ist f integrierbar. $2g$ ist Majorante für $|f - f_n|$ und daher

$$\int |f - f_n| d\mu \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Die Äquivalenzklasse $\tilde f$ ist der Limes. □

Lemma 4.14. *Die Abbildung*

$$L^1(X,\mu) \ni \tilde f \ni f \to \int f d\mu$$

ist eine stetige lineare Abbildung von $L^1(\mu)$ nach $\mathbb{R}$. Es gilt

$$\Big| \int f d\mu \Big| \le \|\tilde f\|_{L^1(X,\mu)}$$

Beweis. Wir haben gesehen, dass die Abbildung wohldefiniert ist - sind $f_1, f_2 \in \tilde{f} \in L^1(X,\mu)$ so ist $f_1 = f_2$ fast überall und

$$\int f_1 d\mu = \int f_2 d\mu$$

Die Abbildung ist linear nach Satz 4.12 und es gilt da $f \leq |f|$

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu = \|\tilde{f}\|_{L^1(X,\mu)}.$$

$\square$

Wir werden bald nicht mehr zwischen der Äquivalenzklasse und einem Vertreter unterscheiden.

Lemma 4.15. *Sei K eine kompakte Menge, A abschlossen und $K \cap A = \{\ \}$. Dann existiert eine stetige Funktion ϕ die Werte zwischen Null und 1 annimmt, die auf A Null und auf K 1 ist.*

Beweis. Sei $\delta = \operatorname{dist}(A,K) > 0$. Wir definieren

$$\phi(x) = \max\{0, 1 - dist(x,K)/\delta\}.$$

$\square$

Satz 4.16. *Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}^d$, das auf allen Bällen endlich ist. Sei $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^d,\mu)$, μ endlich auf Bällen und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger mit*

$$\int |f - g| d\mu < \varepsilon$$

für einen und daher aller Vertreter der Äquivalenklasse. Wir sagen, stetige Funktionen mit kompaktem Träger sind dicht.

Beweis. Es existiert eine einfache Funktion

$$h = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \chi_{A_n}$$

mit A_n Borel, $\lambda_n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\mu(A_n) < \infty$und

$$\int |f - h| d\mu < \varepsilon/2.$$

Nach Lemma 3.3 existieren kompakte Mengen K_n und offene Mengen U_n mit

$$\mu(U_n \backslash K_n) < \frac{1}{2|\lambda_n|N}\varepsilon.$$

In Lemma 3.3 benötigen wir für die Existenz der kompakten Menge $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$, was wir aber durch das Maß $\mu_{A_n}(B) = \mu(A_n \cap B)$ erreichen können. Nach Lemma 4.15 existiert eine stetige Funktion ϕ mit diesen Eigenschaften. Daher ist

$$\int |\lambda_n \chi_{A_n} - \lambda_n \phi| d\mu \leq |\lambda_n| \mu(U_n \backslash K_n) < \frac{1}{2N}\varepsilon.$$

$\square$

Satz 4.17. *Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Lebesguemess- und integrierbar und $\varepsilon > 0$. Dann existierten eine Borelmessbare Funktion $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}$ Lebesgue fast überall und eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger und*

$$\int |f-g| dm^d < \varepsilon$$

Beweis. Nur der erste Teil ist zu zeigen. Sei f eine nichtnegative Lebesgueintegrierbare Funktion und f_n eine monoton wachsende Folge von einfachen Funktionen,

$$f_n = \sum_{m=1}^{M_n} \lambda_{mn} \chi_{A_{mn}}$$

Es existieren Borelmengen $B_{mn} \subset A_{mn}$ mit $m^d(A_{mn} \backslash B_{mn}) = 0$. Wir definieren

$$g_n = \max_{k \le n} \sum_{l=1}^{N_k} \lambda_{lk} \chi_{B_{lk}}.$$

Die Funktionen g_n sind eine monoton wachsende Folge einfacher Funktionen mit $f_n = g_n$ fast überall aufgrund der Konstruktion, d.h. außerhalb einer Nullmenge N_n Dann ist auch $N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$ eine Nullmenge. Sei

$$g(x) := \lim_{n \to \infty} g_n(x).$$

Es folgt $g(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}^d \backslash N$. Da die Funktionen g_n Borelmessbar sind, gilt dies auch für g. Wir wenden dieses Argument auf den positiven und den negativen Anteil an. □

Definition 4.6 (Lebesguepunkte)**.** *Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ m^d integrierbar. Wir nennen x einen Lebesguepunkt von f, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $R > 0$ existiert, so dass*

$$\left| m^d(B_{r_1}(x_1))^{-1} \int_{B_{r_1}(x_1)} u dm^d - m^d(B_{r_2}(x_2))^{-1} \int_{B_{r_2}(x_2)} u dm^d \right| < \varepsilon$$

für alle Bälle mit $r_1, r_2 < R$ und $x \in B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2)$.

Bemerkung: Hängt nur von der Äquivalenzklasse ab.
Wir definieren die sogenannte Maximalfunktion

$$Mf(x) = \sup \left\{ (m^d(B_R(0)))^{-1} \int_{B_R(y)} |f| dm^d : x \in B_R(y) \right\}. \tag{4.5}$$

Lemma 4.18. *Es gilt*

$$m^d(\{x : Mf(x) > t\}) \le \frac{3^d}{t} \int |f| dm^d. \tag{4.6}$$

Beweis. Die Menge

$$A = \{x : Mf(x) > t\}$$

ist aufgrund der Definition offen: Falls $Mf(x) > t$ so existiert ein Ball $B_R(y)$, der x enthält, und für den

$$\int_{B_R(y)} |f| dm^d \ge t m^d(B_R(y)).$$

Dann folgt aber $B_R(y) \subset A$. Sei $K \subset A$ offen. Jeder Punkt ist in einem Ball enthalten, in dem der Mittelwert größer als t ist. Da K kompakt ist, existieren endlich viele Bälle $B_{R_n}(x_n) \subset A$ mit

$$\int_{B_{R_n}(x_n)} |f| dm^d \geq t m^d(B_{R_n}(x_n))$$

und $K \subset \bigcup B_{R_n}(x_n)$. Mit dem Lemma von Vitali können wir disjunkte Bälle daraus auswählen, die wir mit $B_{r_{n_m}}(x_{n_m})$, $m \leq M$ bezeichen mit

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B_{r_n}(x_n) \subset \bigcup_{m=1}^{M} B_{3r_{n_m}}(x_{n_m}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} m^d(K) \leq & \sum_{m=1}^{M} m^d(B_{3r_{n_m}}(x_{n_m})) \\ =& 3^d \sum_{m=1}^{M} m^d(B_{3r_{n_m}}(x_{n_m})) \\ \leq & 3^d t^{-1} \sum_{m=1}^{M} \int_{B_{r_{n_m}}(x_{n_m})} |f| dm^d \\ =& 3^d t^{-1} \int_U |f| dm^d. \end{aligned}$$

□

Satz 4.19. *Sei f integrierbar und L die Menge der Lebesguepunkte. Dann ist $\mathbb{R}^d \backslash L$ eine Nullmenge.*

Beweis. Sei $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig mit kompakten Träger und $B_r(x)$ ein Ball. Dann ist für $x \in B_r(y)$

$$\left| m^d(B_r(y))^{-1} \int_{B_r(y)} f - g dm^d \right| \leq m^d(B_r(y))^{-1} \int_{B_r(y)} |f - g| dm^d \leq M(f-g)(x)$$

Für $\varepsilon > 0$ und $t = \varepsilon/4$ erhalten wir

$$m^d(\{M(f-g)(x) > \varepsilon/4\}) \leq \frac{43^d}{\varepsilon} \|f - g\|_{L^1}$$

Für f integrierbar $\rho > 0$ existiert g stetig mit kompaktem Träger so dass

$$m^d(\{M(f-g)(x) > \varepsilon/4\}) \leq \rho$$

Dann ist g gleichmässig stetig und es existiert δ so dass

$$|g(x) - g(y)| < \varepsilon/2 \qquad \text{falls } |x - y| < \delta$$

Es folgt mit Bällen $B_{r_1}(x_1) \cap B_{r_2}(x_2) \ni x$ und $2r_1 + 2r_2 < \delta$

$$\left| m^d(B_{r_1}(x_1))^{-1} \int_{B_{r_1}(x_1)} g dm^d - m^d(B_{r_2}(x_2))^{-1} \int_{B_{r_2}(x_2)} g dm^d \right| < \varepsilon/2$$

und damit $m^d(N_\varepsilon) \leq \rho$ für jedes $\rho > 0$, wobei $x \in N_\varepsilon$ genau dann, wenn

$$\limsup_r \left| m^d(B_{r_1}(x_1))^{-1} \int_{B_{r_1}(x_1)} f dm^d - m^d(B_{r_2}(x_2))^{-1} \int_{B_{r_2}(x_2)} f dm^d \right| > \varepsilon.$$

Sie ist eine Nullmenge, da die Aussage für alle $\rho > 0$ ist. Der Schnitt

$$N = \bigcup_{n \geq 1} N_{1/n}$$

ist eine Nullmenge als abzählbare Vereinigung von Nullmengen. Das Komplement ist die Menge der Lebesguepunkte. □

[15.11.2018]

[20.11.2018]

4.3. **Produktmaße und der Satz von Fubini.** In diesem Abschnitt betrachten wir Mengen X, Y mit σ Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Wir definieren $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ als die kleinste σ Algebra, die alle Mengen der Form $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ enthält.

Satz 4.20. *Sei $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ und $x \in X$. Dann ist*

$$\{y : (x, y) \in C\} \in \mathcal{B}$$

für alle $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Sind (X, d) und (Y, δ) separable metrische Räume, und sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die Borelmengen auf X resp. Y, so ist $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ die Menge der Borelmengen auf $X \times Y$ mit der Metrik

$$d \times \delta((x_0, y_0), (x_1, y_1)) = \max\{d(x_0, x_1), \delta(y_0, y_1)\}.$$

Beweis. Sei $x \in X$. Wir betrachten die Teilmenge $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sodass

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\} \in \mathcal{B}$$

Eigenschaften:

(1) Mit $A_n \in \mathcal{C}$ für $n \in \mathcal{N}$ ist auch $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}$, da $\mathcal{B}$ eine σ Algebra ist.
(2) Mit A_n ist auch $X \times Y \backslash A_n \in \mathcal{C}$. Auch das folgt direkt aus der Definition.
(3) Alle Mengen der Form $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ sind in $\mathcal{C}$.

Damit ist $C = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, die kleinste σ Algebra, die alle messbaren Rechtecke enthält.

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Borelmengen, so enthält $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ alle Bälle . die sind das Produkt von Bällen in X und Y.

Da X und Y separabel sind gilt das auch für $X \times Y$. In einem separablen metrischen Raum sind offene Mengen abzählbare Vereinigungen von Bällen (Warum?). Damit sind alle offenen Mengen und auch alle Borelmengen in $X \times Y$.

Wir zeigen: Sind A und B Borelmengen, so gilt das auch für $A \times B$. Sei also A offen und $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ die Menge aller Borelmengen, für die $A \times B$ eine Borelmenge ist. Das gilt offensichtlich für jede offene Menge B, abzählbare Vereinigungen bleiben in $\mathcal{C}$ und genauso Komplemente da

$$A \times (Y \backslash B) = (X \times Y \backslash (A \times B)) \cap (A \times Y).$$

Damit ist $\mathcal{C}$ die σ Algebra der Borelmengen. Wir wiederholen das Argument mit einer Borelmenge B und $\mathcal{C}$ die Menge der Borelmengen in X, für die $A \times B$ eine Borelmenge ist.

Damit sind alle Produkte von Borelmenge Borelmengen, und daher ist $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, die die kleinste σ Algebra ist, die alle Produkte von Borelmengen enthält, selbst in den Borelmengen enthalten. $\square$

Definition 4.7. *Ein Maß μ eines Maßraumes $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt σ endlich, falls eine Folge von messbaren Mengen A_n existiert, so dass*

$$\mu(A_n) < \infty$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

Satz 4.21 (Produktmaß)**.** *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume mit σ endlichen Maßen. Dann existiert genau ein Maß $\mu \times \nu$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ so dass*

$$\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

$\mu \times \nu$ ist σ endlich. Für $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ist

$$x \to \nu(\{y : (x, y) \in C\})$$

messbar und nichtnegativ und es gilt

$$\mu \times \nu(C) = \int_X \nu(\{y : (x, y) \in C\}) d\mu \tag{4.7}$$

Sind μ und ν Borelmaße, so ist $\mu \times \nu$ ein σ endliches Borelmaß.

Bemerkung: Das Lebesguemaß. Sei $d = d_1 + d_2$. Dann stimmt das Produktmaß $m^{d_1} \times m^{d_2}$ mit der Einschränkung von m^d überein: Zunächst ist die Aussage für dyadische Würfel klar ($2^{dk} = 2^{d_1 k} 2^{d_2 k}$). Dann gilt sie auch für abzählbare Vereinigungen, und damit für offene Menge und deren abzählbare Schnitte. Insbesondere existiert für jede Borelmenge A ein abzählbarer Schnitt von offenen Mengen B, so dass $A \subset B$, $m^d(B \backslash A) = 0$ und $m^{d_1} \times m^{d_2}(B) = m^d(B)$. Jede Nullmenge ist Caratheodory messbar, also folgt die Aussage daraus, dass Lebesguenullmengen Caratheodorynullmengen für das Produktmaß sind. Das folgt aber aus der Definition.

Insbesondere ist für jede nichtnegative Borelmessbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty) \times \{\infty\}$ die Menge

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 < t < f(x)\}$$

eine Borelmenge und nach dem obigen Satz

$$m^{d+1}(\{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 < t < f(x)\}) = \int_{\mathbb{R}^d} f dm^d.$$

Wir erhalten insbesondere das Prinzip von Cavalieri.

Beweis von Satz 4.21. Wir definieren das äußere Maß

$$(\mu \times \nu)_*(C) = \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) : A_n \in \mathcal{A}, B_n \in \mathcal{B}, C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n \Big\}.$$

Es gilt

(1) $(\mu \times \nu)_*(\{\ \}) = 0$
(2) Aus $C_1 \subset C_2$ folgt $(\mu \times \nu)_*(C_1) \leq (\mu \times \nu)_*(C_2)$.

(3) Es gilt immer (wie beim Lenesguemaß)

$$(\mu \times \nu)_*\Big(\bigcup_{n=1}^\infty C_n\Big) \le \sum_{n=1}^\infty (\mu \times \nu)_*(C_n).$$

Wir zeigen nun für $A \subset \mathcal{A}$ und $B \subset \mathcal{B}$

$$(\mu \times \nu)_*(A \times B) = \mu(A) \times \nu(B)$$

Da aufgrund der Definition mit $A_1 = A, B_1 = B, A_n = \{\}, B_n = \{\}$ für $n > 1$ $(\mu \times \nu)_*(A \times B) \le \mu(A)\nu(B)$ müssen wir die umgekehrte Ungleichung zeigen. Sei also

$$A \times B \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n \times B_n.$$

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $A_n \subset A$ und $B_n \subset B$, da die Summe in der Definition des äußeren Maßes nicht wächst, wenn wir die Mengen A_n mit A schneiden. Als Nächstes konstruieren wir disjunkte $A'_n \times B'_n$, so dass wieder die Summe nicht größer wird. Seien für $N \in \mathbb{N}$ disjunkte $A'_m \times B'_m$ mit $m \le M$ gewählt, so dass

$$\bigcup_{n=0}^N A_n \times B_n = \bigcup_{m=0}^M A'_m \times B'_m$$

und

$$\sum_{m=0}^M \mu(A'_m)\nu(B'_m) \le \sum_{n=0}^N \mu(A_n)\nu(B_n). \tag{4.8}$$

Wir schreiben

$$A_{n+1} \times B_{n+1} \backslash \Big((A_{n+1} \times B_{n+1}) \cup \bigcup_{m=0}^M A'_m \times B'_m\Big) = \bigcup_{l=1}^L A''_l \times B''_l$$

mit einer disjunkten Vereinigung auf der rechten Seite. Wir konstruieren diese Zerlegung rekursiv. Da für $A \subset A'$ and $B \subset B'$

$$A' \times B' \backslash (A \times B) = (A' \backslash A) \times (B' \backslash B) \cup (A' \backslash A) \times B \cup A \times (B' \backslash B)$$

erhalten wir diese Zerlegung rekursiv. In jedem Schritt verifizieren wir die Ungleichung analog zu (4.8).

Wir fixieren nun $x \in A$. Da jedes $y \in B$ genau in einer Menge $A_n \times B_n$ liegt folgt

$$\nu(B) = f(x) := \sum_{n : x \in A_n \times B_n} \nu(B_n)$$

und

$$\begin{aligned} \nu(A) \times \mu(B) &= \int_A f d\mu = \int_A \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}(x)\nu(B_n) d\mu \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_{A_n} \nu(B_n) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)\nu(B_n) \end{aligned}$$

mit dem Satz über monotone Konvergenz. Es folgt

$$\mu \times \nu_*(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

Nach dem Satz von Caratheodory definiert die Einschränkung auf die Caratheodory-messbaren Mengen ein Maß. Wir zeigen nun: Alle Produkte von messbaren Mengen sind messbar. Seien also $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$. Zu zeigen ist: Für alle $E \subset X \times Y$ gilt

$$\mu \times \nu_*(E) = \mu \times \nu_*(E \cap (A \times B)) + \mu \times \nu_*(E \cap (X \times Y) \backslash (A \times B)$$

Da $' \leq'$ aufgrund der Eigenschaften des äußeren Maßes gilt, genügt es $\geq$ zu zeigen. Sei

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n.$$

Wie oben dürfen wir annehmen, dass die $A_n \times B_n$ disjunkt sind. Wir zerlegen A_n in $A \cap A_n$ und $A_n \cap (X \backslash A)$ und schreiben

$$\begin{aligned} E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n) \times (B \cap B_n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ((X \backslash A) \cap A_n) \times (B \cap B_n) \\ \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n) \times ((Y \backslash B) \cap B_n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ((X \backslash A) \cap A_n) \times ((Y \backslash B) \cap B_n) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) \geq & (\mu \times \nu)_*((A \times B) \cap E) + (\mu \times \nu)_*((X \backslash A) \times B) \cap E) \\ & + (\mu \times \nu)_*((A \times (Y \backslash B)) \cap E) \\ & + (\mu \times \nu)_*((X \backslash A) \times (Y \backslash B)) \cap E) \\ \geq & (\mu \times \nu)_*((A \times B) \cap E) + (\mu \times \nu)_*(X \times Y \backslash (A \times B) \cap E). \end{aligned}$$

Damit folgt die gewünschte Ungleichung. Da $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ die kleinste σ Algebra ist, die alle messbaren Produkte enthält, ist jedes Element von $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ Caratheodory messbar.

Es ist leicht zu sehen, dass das Produktmaß σ endlich ist.

Insbesondere sind aber auch abzählbare Vereinigungen von Produkten messbarer Mengen messbar, und für diese gilt mit monotoner Konvergenz (wir können sie als disjunkte Produkte schreiben) die Integralformel: Sei $C = \bigcup_n A_n \times B_n$ disjunkt so folgt wie oben

$$\begin{aligned} \mu \times \nu(C) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_n}(x)\nu(B_n) d\mu(x) \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\nu(B_n) d\mu(x) \\ &= \int_X \nu(\{y : (x, y) \in C\}) d\mu(x), \end{aligned}$$

was die gewünschte Integralformel für abzählbare Vereinigungen von Produkten ist.

Als nächsten zeigen wir die Formel für abzählbare Schnitte $V = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ wobei U_n abzählbare Vereinigungen von messbaren Produkten sind, die endliches Maß haben. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $U_{n+1} \subset U_n$ für alle n. Es folgt

$$\begin{aligned} \mu \times \nu(V) &= \lim_{n\to\infty} \mu \times \nu(U_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X \nu(\{y : (x,y) \in U_n\}) d\mu(x) \\ &= \int_X \nu(\{y : (x,y) \in V) d\mu(x) \end{aligned}$$

mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue, da für alle x

$$\nu(\{y : (x,y) \in U_n\}) \to \nu(\{y : (x,y) \in V\})$$

falls $\nu(\{y : \{(x,y) \in U_n\}) < \infty$, was für fast alle x gilt.

Sei jetzt C $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ messbar mit endlichem Maß. Dann existieren nach Definition endliche Vereinigungen von messbaren Produkten U_n mit $C \subset U_n$ und

$$\mu \times \nu(U_n) < \mu \times \nu(C) + \frac{1}{n}.$$

Sei $V = \bigcup U_n$. Dann gilt

$$\mu \times \nu(A) = \mu \times \nu(V) = \int_X \nu(\{y : (x,y) \in V\}) d\mu(x).$$

Sei jetzt $B = V \backslash A$. Dann ist $\mu \times \nu(B) = 0$ und die Aussage folgt sobald wie zeigen

$$\nu(\{y : (x,y) \in B\}) = 0$$

fast überall. Wie vorher existiert eine monotone Folge von abzählbaren Vereinigungen U_n mit $B \subset U_n$ und $\mu \times \nu(U_n) < \frac{1}{n}$. Sei $V = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$. Es folgt

$$0 = \int_X \nu(\{y : (x,y) \in V\}) d\mu(x)$$

woraus

$$\nu(\{y : (x,y) \in B\}) \le \nu(\{y : (x,y) \in V\}) = 0$$

fast überall folgt. Ist $\mu \times \nu(C) = \infty$, so finden wir mit der σ Endlichkeit aufsteigende Mengen C_n, für die die Integralformel gilt. Damit ist dann auch die rechte Seite ∞.

Diese Konstruktion impliziert auch die Eindeutigkeit: Sei $\widehat{\mu \times \nu}$ ein zweites Maß, das die Produkteigenschaft hat. Dann folgt

(1) $\widehat{\mu \times \nu}(U) = \mu \times \nu(U)$ für jede abzählbare Vereinigung von Produkten.
(2) $\widehat{\mu \times \nu}(A) = \mu \times \nu(A)$ für jeden abzählbarem Schnitt von abzählbaren Vereinigung von Produkten.
(3) $\widehat{\mu \times \nu}(N) = \mu \times \nu(N)$ für jede Nullmenge
(4) $\widehat{\mu \times \nu}(C) = \mu \times \nu(C)$ für $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Sind X und Y metrische Räume und μ und ν σ endliche Borelmaße, so ist das äußere Produktmaß ein äußeres metrischen Maß und das Produktmaß ist auf den Borelmengen definiert. Die Borelmengen sind aber die Elemente der Produkt σ Algebra in diesem Fall. $\square$

Satz 4.22 (Satz von Fubini)**.** *Sei $d_1 + d_2 = d$ und $f : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ sei eine nichtnegative Lebesguemessbare Funktion. Dann ist für fast alle $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ die Abbildung*

$$x_2 \to f(x_1, x_2)$$

messbar und

$$x_1 \to \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dm^{d_2}(x_2)$$

ist m^{d_1} messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f dm^d = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dm^{d_2}(x_2) dm^{d_1}(x_1).$$

Ist $f : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ Lebesgue integrierbar, so ist für fast alle x_1

$$x_2 \to f(x_1, x_2)$$

integrierbar und

$$x_1 \to \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dm^{d_2}(x_2)$$

ist m^{d_1} messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f dm^d = \int \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x_1, x_2) dm^{d_2}(x_2) dm^{d_1}(x_1).$$

Beweis. Es genügt, diese Aussagen für einfache Funktionen zu zeigen. Für jede Lebesguemenge A existiert eine Borelmenge B mit $A \subset B$ und $B \backslash A$ ist eine Nullmenge. Für charakteristische Funktionen von Borelmengen folgt die Aussage aus Satz (4.21). Genauso ist jede Lebesguenullmenge in einer Borelnullmenge mit selbem Maß enthalten, für deren charaktische Funktion die Integralformel gilt.

Sei N eine Lebesguenullmenge. Diese ist in einer Borelmenge B vom Maß Null enthalten. Für diese gilt

$$0 = m^d(B) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_B(x_1, x_2) dm^{d_2}(x_2) dm^{d_1}(x_1)$$

Dann ist aber das innere Integral für fast alle x_1 Null und da

$$N_{x_1} = \{(x_1, x_2) \in N\} \subset B_{x_1} = \{(x_1, x_2) \in A\}$$

ist N_{x_1} für fast alle x_1 eine Nullmenge, und damit m^{d_2} messbar. □

Beispiele:

(1) Sei

$$I_d := \int e^{-|x|^2} dm^d$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$I_{d_1+d_2} = I_{d_1} I_{d_2}.$$

Mit $\pi = m^2(B_1(0))$ erhalten wir

$$I_2 = \pi$$

und $I_d = \pi^{d/2}$ und

$$m^d(B_1(0)) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d+2}{2})}$$

(2) Sei $A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < x_2 < 1\}$, und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Wir identifizieren die Funktion mit der auf ganz $\mathbb{R}^2$, die Null außerhalb von A ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_A f dm^2 &= \int_{(0,1)} \int_{(x_1,1)} f dm^1(x_2) dm^2(x_1)\\ &= \int_0^1 \int_{x_1}^1 f(x_1,x_2) dx_2 dx_1 = \int_0^1 \int_0^{x_2} f(x_1,x_2) dx_1 dx_2\end{aligned}$$

Zur Notation: Es ist wichtig, dass Maß, Integrand und Integrationsgebiet klar sind. Es gibt die unterschiedlichsten Notationen insbesondere für das Lebesgueintegral:

$$\int_A f dm^d = \int_A f(x) dm^d(x) = \int_A f dx = \int_A f = \int_A dx\, f$$

In der Vorlesung werden wir zurückhaltend bei der Wahl der Notation sein.

[20.11.2018]

[22.10.2018]

Das Prinzip von Cavalieri ist eine einfache Konsequenz.

Lemma 4.23. *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^d$ Borelmessbar, $d_1 + d_2 = d$ und für alle $x_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ gelte*

$$m^{d_2}(\{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x_1,y) \in A\}) = m^{d_2}(\{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x_1,y) \in B\})$$

Dann folgt $m^d(A) = m^d(B)$.

Wir beweisen nun die isodiametrische Ungleichung für offene Mengen.

Lemma 4.24. *Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann gilt*

$$m^d(A) \le c_d \frac{\operatorname{diam}(A)}{2}^d$$

Beweis. Wir definieren

$$A_j = \Big\{x : 2|x_j| < m^1(\{y : (x_1,\dots,x_{j-1},y,x_{j+1},\dots x_d)\})\Big\}$$

und beweisen: A_j ist offen. Ohne Einschränkung betrachten wir $j = d$ um die Notation zu vereinfachen. Sei für $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$

$$A_{x'} = m^1(\{t : (x',t) \in A\})$$

und $\varepsilon > 0$ und $K \subset A_{x'}$ kompakt so dass

$$m^1(A_{x'}) < m^1(K) + \varepsilon.$$

Dann ist $\operatorname{dist}(\{x'\} \times K, \mathbb{R}^d \backslash A) =: \delta > 0$ und damit

$$\{y'\} \times K \subset A$$

für $|x' - y'| < \delta$. Damit ist A_d offen. Nachdem Prinzip von Cavalieri gilt

$$m^d(A_j) = m^d(A)$$

Wir zeigen nun

$$\operatorname{diam}(A_j) \leq \operatorname{diam}(A),$$

was wir wieder für $j = d$ tun. Wir definieren

$$f_+(x') = \sup\{t : (x', t) \in A\}$$
$$f_-x') = \inf\{t(x', t) \in A\}$$

und

$$g(x') = \sup\{t : (x', t) \in A_d\}$$

Es folgt falls $g(x') > 0$

$$2g(x') \leq f_+(x') - f_-(x')$$

und daher

$$\begin{aligned} g(x') + g(y') \leq & \frac{1}{2}(f_+(x') - f_-(y') + f_+(y') - f_-(x')) \\ \leq & \max\{f_+(x') - f_-y', f_+(y') - f_-(x')\} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} |f(x') + f(y')|^2 + |x' - y'|^2 \leq & \\ & \leq \max\{|g_+(x') - g_-(y')|^2, |g_+(y') - g_-(x')|^2 + |x' - y'|^2\} \\ \leq & \operatorname{diam}(A). \end{aligned}$$

Jede Symmetrisierung führt offene Mengen in offene Mengen über, verringert den Durchmesser, und erhält das Volumen. Wir symmetrisieren in jede Koordinatenrichtung. Offensichtlich bleiben vorherige Symmetrien erhalten. Wir erhalten nach d Schritten eine offene Menge, die in jeder Koordinatenrichtung symmetrisch ist, und damit auch bezüglich der Spiegelung am Ursprung, mit dem gleichen Volumen, und einem Durchmesser, der nicht gewachsen ist. Diese Menge ist aber in einem Ball $B_{\operatorname{diam}(A)/2}(0)$ enthalten, und hat daher höchstens dieses Volumen. $\square$

5. Formeln für Integrale

5.1. **Der Transformationssatz.** Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die aus der Analysis 1 bekannte Subtitutionsregel für Integrale auf den mehrdimensionalen Fall zu verallgemeinern.

Erinnerung.

1. Ist $t\colon [a,b] \to [\alpha,\beta]$ bijektiv und stetig differenzierbar, so gibt es zwei Fälle: Entweder $t' \geq 0$, womit dann $t(a) = \alpha$ und $t(b) = \beta$ gilt, oder $t' \leq 0$, womit dann $t(a) = \beta$ und $t(b) = \alpha$ gilt. In beiden Fällen sehen wir, dass dann

$$\int_a^b f(t(x))|t'(x)|dx = \int_\alpha^\beta f(y)dy$$

gilt. Wir werden später sehen, dass wir $|t'(x)|$ als $|\det(t'(x))|$ interpretieren können - im Eindimensionalen macht das keinen Unterschied.

2. Sind $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen, so heißt $T\colon U \to V$ ein (C^1)-Diffeomorphismus, falls T stetig differenzierbar, bijektiv mit Inverser der Klasse C^1 ist.

Nun kurz zur Idee des Transformationssatzes. Seien U, V wie oben und $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Angenommen, U kann in kleine Würfel Q_k mit Mittelpunkt x_k zerlegt werden, und der Diffeomorphismus T bildet jeden der Würfel Q_k auf ein P_k ab, wobei weiters $y_k := T(x_k)$. Sind die Würfel Q_k fein genug, so ist f auf jedem P_k 'fast' konstant, und T auf jedem Q_k (als C^1-Diffeomorphismus) 'fast' affin (Linearisierung). Dann ist aber $\sum_k f(y_k)m(P_k)$ eine gute Näherung an $\int_V f dm$. Andererseits wissen wir: Ist Q ein Quader und $S\colon Q \to \mathbb{R}^d$ affin, so ist $m(S(Q)) = |\det(S')|m(Q)$. Also erwarten wir

$$\begin{aligned}\int_V f dm &\approx \sum_k f(y_k)m(P_k)\\ &\approx \sum_k f(T(x_k))|\det(T'(x_k))|m(Q_k) \approx \int_U f(T(x))|\det(T'(x))|dm.\end{aligned}$$

Das ist in der Tat wahr:

Satz 5.1 (Transformationssatz)**.** *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen und sei $T\colon T\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist $f\colon U \to V$ genau dann integrierbar über V, wenn $(f \circ T)\cdot|\det(T')|$ über U integrierbar ist, und in diesem Fall gilt*

$$\int_U f(T(x))|\det(T'(x))|dm(x) = \int_V f dm(y).$$

Bevor wir zu dem Beweis des Transformationssatzes kommen, einige Beispiele.

Beispiel 5.1 (Polarkoordinaten). Sei $|\cdot|$ die Euklidische Norm und sei $I \subset [0,\infty)$ ein offenes Intervall. Weiters sei $K(I) := \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| \in I\}$ die zugehörige Kugelschale. Die *Polarkoordinatenabbildung* P_d bildet diffeomorph $P_d \colon I \times \Pi \to K^*(I)$ ab, wobei

$$\Pi := \begin{cases} (-\pi,\pi), & \text{falls } d = 2, \\ (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{d-2}, & \text{falls } d \geq 3, \end{cases}$$

und $K^*(I) := K(I) \setminus (S \times \mathbb{R}^{d-2})$ mit $S := \{(x_1,0)^\top \colon x_1 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ ab. Genauer: Im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist sie gegeben durch

$$P_2(r,\varphi_1) := (r\cos(\varphi_1), r\sin(\varphi_1))^\top,$$

$$P_3(r,\varphi_1,\varphi_2) := r(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2), \sin(\varphi_2))^\top.$$

Dann gilt für $(r,\varphi) := (r,\varphi_1,...,\varphi_{d-1}) \in I \times \Pi$:

$$|\det(P_d'(r,\varphi))| = r^{d-1}C(\varphi),$$

wobei $C(\varphi) = \cos^0(\varphi_1)\cos^1(\varphi_2)...\cos^{d-2}(\varphi_{d-1})$. Insbesondere:

$$|\det(P_2'(r,\varphi))| = r, \quad |\det(P_3'(r,\varphi))| = r^2\cos(\varphi_2).$$

In Verbindung mit Fubini erhalten wir dann: Eine Funktion $f \colon K(I) \to \mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn $f(P_d(r,\varphi))C(\varphi)r^{d-1}$ über $I \times \Pi$ integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_{K(I)} f(x)dm(x) = \int_I \int_\Pi f(P_d(r,\varphi))C(\varphi)r^{d-1}dm(\varphi)dm(r).$$

Explizit für $d = 2$ und $d = 3$:

$$\int_{K(I)} f dm(x) = \int_I \int_{[-\pi,\pi]} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))r d\varphi dr,$$

$$\int_{K(I)} f dm(x) = \int_I \int_{[-\pi,\pi]} \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} f(P_3(r,\varphi,\psi))r^2\cos(\psi)dm(\psi)dm(\varphi)dm(r).$$

Beispiel 5.2 (Radiale Funktionen). Sei wieder $I \subset [0,\infty)$ ein offenes Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$. Dann ist $x \mapsto f(|x|)$ genau dann auf $K(I)$ integrierbar, falls $r \mapsto r^{d-1}f(r)$ über I integrierbar ist, und es gilt

$$\int_{K(I)} f(|x|)dm(x) = dc_d \int_I f(r)r^{d-1}dm(r),$$

wobei c_d das Lebesguemaß der d-dimensionalen Euklidischen Einheitskugel ist. Dies folgt aus dem obigen: Wir kombinieren den Transformationssatz mit Fubini, um

$$\int_{K(I)} f(|x|)dm(x) = \int_I f(r)r^{d-1}dm(r) \int_\Pi C(\varphi)dm^{d-1}(\varphi)$$

zu erhalten. Wir müssen dann noch das letzte Integral auswerten. Die letzte Formel gilt insbesondere für die konstante Funktion $f \equiv 1$ und $I = (0,1)$, und damit

$$m(K(I)) = \int_0^1 r^{d-1}dr \int_\Pi C(\varphi)dm^{d-1}(\varphi) = \frac{1}{d}\int_\Pi C(\varphi)dm^{d-1}(\varphi),$$

aber da $m(K(I)) = c_d$ im vorliegenden Fall, folgt dann die Behauptung.

Nun zum Beweis des Transformationssatzes. Im Folgenden nehmen wir die Würfel immer achsenparallel an. Wir werden an mehreren Stellen benötigen, dass Diffeomorphismen Nullmengen auf Nullmengen abbilden. Hierzu zuerst zwei Lemmata.

Lemma 5.2. *Ist $N \subset \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-Nullmenge und $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Lipschitzstetig, so ist auch $T(N)$ eine Lebesgue-Nullmenge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann finden wir eine Folge von Würfeln (Q_k) mit $N \subset \bigcup_k Q_k$ und $\sum_k m(Q_k) < \varepsilon$. Da T Lipschitzstetig bezüglich einer Norm ist, ist es wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^d$ insbesondere auch Lipschitzstetig bezüglich der Maximumsnorm $|\cdot|_\infty$ mit Lipschitzkonstante L. Daraus schließen wir, dass $T(N \cap Q_k)$ in einem Qürfel mit Maß höchstens $(2L)^d m(Q_k)$ liegt, und damit

$$m(T(N)) \leq m(T\Big(\bigcup_k (N \cap Q_k)\Big)) \leq \sum_k m(T(N \cap Q_k)) \leq (2L)^d \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt hieraus die Behauptung. □

Corollar 5.3. *Sei $N \subset \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-Nullmenge, $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $T\colon U \to \mathbb{R}^d$ eine C^1-Abbildung mit $N \subset U$, so ist $T(N)$ auch eine Lebesgue-Nullmenge.*

Beweis. Da $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, ist U messbar und wir finden abzählbar viele kompakte Quader $Q_k \subset U$ mit $U = \bigcup_k Q_k$. Also ist $T|_{Q_k}$ als stetig differenzierbare Abbildung auf dem Kompaktum Q_k Lipschitzstetig. Nach dem vorherigen Lemma ist also $T(N \cap Q_k)$ eine Lebesgue-Nullmenge, und wir haben weiters

$$T(N) \subset T(\bigcup_k N \cap Q_k) \subset \bigcup_k T(N \cap Q_k).$$

Also ist $T(N)$ enthalten in einer abzählbaren Vereinigung von Lebesgue-Nullmengen, und damit selber eine Lebesgue-Nullmenge. □

Sei nun im Folgenden $T\colon U \to V$ mit $U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen ein C^1-Diffeomorphismus. Wir kommen nun zum Hauptteil der Vorbereitungen zum Beweis des Transformationssatzes. Hierzu benötigen wir zuerst Abschätzungen, die es uns erlauben, das Maß einer Menge unter der Abbildung T gegen das Maß der Menge selber abzuschätzen. Wir beginnen mit

Lemma 5.4. *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $W \subset U$ ein kompakter Würfel. Dann gilt*

$$m(T(W)) \leq \max_{x \in W} |\det(T'(x))| \cdot m(W).$$

Beweis. Zuerst ist $T(W)$ kompakt als Bild des Kompaktums W unter der stetigen Abbildung T. Damit ist $T(W)$ insbesondere messbar. Wir dürfen außerdem $m(W) \neq 0$ annehmen (ansonsten nutze das vorherige Lemma). Sei nun $\alpha > 0$ diejenige Zahl mit $m(T(W)) = \alpha m(W)$. Wir zerlegen W durch d kantenhalbierende Hyperebenen der Form $\{x_j = c_j\}$ in 2^d kompakte Teilwürfel. Unter diesen Teilwürfeln gibt es einen Würfel W_1 mit

$m(T(W_1)) \geq \alpha m(W_1)$. Wir iterieren diese Vorgehensweise und erhalten daraus eine Folge von kompakten Würfeln (W_k) mit $W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset ...$ und $m(W_k) \to 0$ mit $k \to \infty$ und $m(W_k) \geq \alpha m(W_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit gibt es genau einen Punkt, der allen W_k's angehört, also $a \in \bigcap_k W_k$, und wir setzen $b := T(a)$. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $a = b = 0$. Sei nun m_k der Mittelpunkt von W_k und ℓ die halbe Kantenlänge von W. Dann gilt $W_k := \{x\colon\ |x - m_k|_\infty \leq 2^{-k}\ell\}$, und da $0 = a \in W_k$, $|m_k|_\infty \leq 2^{-k}\ell$.
Da $A := T'(0)$ invertierbar, können wir schreiben:

$$T(x) = A(x + |x|_\infty r(x)), \qquad x \in U,$$

wobei $r(x) \to 0$ mit $|x|_\infty \to 0$. Dies ist eine Folge der Differenzierbarkeit von T. Wir behaupten: Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass die Menge $V_k := \{x + |x|_\infty r(x)\colon x \in W_k\}$ im Würfel $W_k^\varepsilon := \{z\colon\ |x - m_k|_\infty \leq 2^{-k}\ell(1+\varepsilon)\}$ enthalten ist. Um das zu einzusehen, wähle k so, dass $|r(x)|_\infty < \varepsilon/2$ für $x \in W_k$. Nun ist $|x|_\infty \leq 2^{-k+1}\ell$ für $x \in W_k$, und damit $x + |x|_\infty r(x) \in W_k^\varepsilon$. Da $V_k \subset W_k^\varepsilon$ für $k = k(\varepsilon)$, folgt $T(W_k) = AV_k \subset AW_k^\varepsilon$. Da wir allerdings bereits wissen, wie sich das Lebesguemaß von Würfeln unter linearen Abbildungen verhält, schließen wir weiters $m(T(W_k)) \leq (1+\varepsilon)^d|\det(A)|m(W_k)$.
Zurück zum Hauptteil des Beweises: Angenommen, α erfülle

$$\alpha > \max_{x\in W} |\det(T'(x))| \geq |\det(A)|.$$

Wähle dann $\varepsilon > 0$ so klein, dass $(1+\varepsilon)^d|\det(A)| < \alpha$ gilt. Für W_k, $k = k(\varepsilon)$ erhalten wir dann nach dem Obigen $m(T(W_k)) < \alpha m(W_k)$, was im Widerspruch zur Annahme $m(T(W_k)) \geq \alpha m(W_k)$ steht. Damit ist die Aussage bewiesen. □

Eine Verfeinerung dieses Arguments liefert:

Lemma 5.5. *Sei $K \subset U$ eine kompakte Menge, und sei $Q := T(K)$. Dann gilt:*

$$\min_{x\in K} |\det(T'(x))| \cdot m(K) \leq m(Q) \leq \max_{x\in K} |\det(T'(x))| \cdot m(K).$$

Beweis. Übung. □

Im Folgenden nennen wir eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine *Treppenfunktion*, wenn es endlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_1, ..., Q_s$ gibt, so dass f auf jedem Q_i, $i = 1, ..., s$ konstant ist und $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^s Q_i$ gilt.

Lemma 5.6. *Der Transformationssatz gilt für jede Treppenfunktion mit kompaktem Träger in V .*

Beweis. Wegen Linearität des Lebesgueintegrals müssen wir die Aussage nur für charakteristische Funktionen von Quadern zeigen, und wir können uns dabei auf kompakte Quader beschränken, da der Rand von Quadern stets eine Lebesuge-Nullmenge ist.

Sei also Q ein kompakter Quader in V. Da $\chi_Q \circ T$ außerhalb der kompakten Menge $T^{-1}(Q)$ verschwindet und T, $|\det(T')|$ stetig sind, ist $(\chi_Q \circ T)|\det(T')|$ über U integrierbar. Wir müssen also nur noch die Formel

$$\int_{T^{-1}(Q)} |\det(T'(x))|dm = \int_Q 1\,dm$$

zeigen. Sei hierzu $\varepsilon > 0$ beliebig und setze $S := T^{-1}$. Da $|\det(S')|^{-1}$ stetig ist auf Q, können wir $Q = Q_1 \cup ... \cup Q_r$ zerlegen in kompakte Quader Q_i, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben und so klein sind, dass in jedem Q_i auch gilt: $\max_{Q_i} |\det(S')|^{-1} - \min_{Q_i} |\det(S')|^{-1} \leq \varepsilon$. Sei $K_i := S(Q_i)$. Dann folgt aus dem vorausgegangenen Lemma:

$$\left| \int_{K_i} |\det(T'(x))dm - m(Q_i) \right| \leq \varepsilon m(K_i).$$

Da die Durchschnitte $K_i \cap K_j = S(Q_i \cap Q_j)$ Lebesgue-Nullmengen sind, erhalten wir durch Summieren:

$$\left| \int_{S(Q)} |\det(T'(x))|dm - m(Q) \right| \leq \varepsilon m(S(Q)).$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 5.7. *Sei $f \colon V \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi \colon V \to \mathbb{R}$, die kompakten Träger in V hat und für die $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Da die einfachen Funktionen dicht in $L^1(V, m^d)$ sind, genügt es, die Aussage für einfache Funktionen und sogar nur für characteristische Funktionen χ_A für Mengen A von endlichem Maß zu zeigen. Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Regularität des Lebesguemasses existiert eine kompakte Menge $K \subset A$ so dass

$$m^d(A \backslash K) < \varepsilon/3.$$

Aufgrund der Definition des äußeren Maßes existieren disjunkte dyadische Würfel $Q_{j_n k_n}$ so dass $\overline{Q_{j_n k_n}} \subset V$ (da der Abstand von K zu $\mathbb{R}^d \backslash K$ positiv ist, und wir kleine Würfel nehmen dürfen), $A \subset \bigcup Q_{j_n k_n}$ und

$$\sum_n m^d(Q_{j_n k_n}) \leq m^d(K) + \varepsilon/3$$

Da die Summe konvergiert existiert N so dass

$$\sum_{n=N+1} m^d(Q_{j_n k_n}) < \varepsilon/3.$$

Wir definieren

$$E = \bigcup_{n=1}^{N} Q_{j_n k_n}$$

und es folgt

$$m^d(A \Delta E) < \varepsilon$$

und

$$\int |\chi_A - \chi_E| dm^d < \varepsilon.$$

Hier ist $A \Delta E = (A \cup E) \backslash (A \cap E)$. $\square$

Nun kommen wir zum

Beweis des Transformationssatzes. Sei f integrierbar über V. Nach Lemma 5.7 gibt es eine Folge von einfachen Funktionen (φ_k), die

(1) kompakten Träger in V haben,
(2) $\|f - \varphi_k\|_1 \to 0$ mit $k \to \infty$ erfüllen.

Nach Übergang zu einer Teilfolge (siehe Beweis zum Satz 4.13) können wir weiters

$$\varphi_k \to f$$

punktweise fast überall – genauer, außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge N – erreichen. Wir setzen nun

$$\widetilde{\varphi}_k := (\varphi_k \circ T) \cdot |\det(DT)|,$$
$$\widetilde{f} := (f \circ T) \cdot |\det(DT)|.$$

Nach Lemma 5.7 ist jedes $\widetilde{\varphi}_k$ über U integrierbar und weiters eine L^1-Cauchyfolge. Es ist dann

$$\|\widetilde{\varphi}_k - \widetilde{\varphi}_k\|_1 = \int_U |\widetilde{\varphi}_k - \widetilde{\varphi}_k| dm = \int_V |\varphi_k - \varphi_l| dm \to 0$$

mit $k, l \to \infty$. Außerhalb $T^{-1}(N)$ konvergiert $\widetilde{\varphi}_k \to \widetilde{f}$. Also ist $\widetilde{f}$ auch nach Satz 4.13 integrierbar mit

$$\int_U \widetilde{f} dm = \lim_{k\to\infty} \int_U \widetilde{\varphi}_k dm = \lim_{k\to\infty} \int_V \varphi_k dm = \int_V f dm.$$

Umgekehrt sei nun $\widetilde{f}$ über U integrierbar. Dann wenden wir das bereits Bewiesene auf die Umkehrabbildung $S := T^{-1} \colon V \to U$ an und erhalten, dass $(\widetilde{f} \circ S) \cdot |\det(S')| = f$ über V integrierbar ist. □

[22.10.2018]

[04.12.2018]

5.2. **Die Singulärwertzerlegung.** Wir suchen eine Normalform für eine lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \geq 1$. Die Abbildungen A stehen in einer 1 zu 1 Beziehung zu $m \times n$ Matrizen, die wir mit den Abbildungen identifizieren. Wir erlauben orthogonale Basiswechsel in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$, um eine möglichst einfache Gestalt zu erreichen.

Satz 5.8. *Sei A eine $m \times m$ Matrix. Dann existieren eine orthogonale $m \times m$ Matrix U , eine orthogonale $n \times n$ Matrix V und eine $m \times n$ Matrix, die nur auf der Diagonalen nichtverschwindende Einträge hat so dass*

$$A = UDV^T$$

Die Einträge von D sind nichtnegativ. Sie heißen Singulärwerte.

Beobachtungen

(1) Es folgt

$$A^T A = V D^T D V^T$$

wobei D eine positive semidefinite $n \times n$ Diagonalmatrix, deren Einträge die Quadrate der Singulärwerte (plus möglicherweise 0) sind. Die Spalten von V sind orthonormale Eigenvektoren von $A^T A$, und die Singulärwerte sind Wurzeln der Eigenwerte von $A^T A$.

(2) Genauso ist $AA^T = UDD^T U^T$ und die Spalten von U sind orthonormale Eigenvektoren von AA^T.

(3) In dieser Basis wird die Abbildung durch die Abbildungsmatrix D beschrieben. Equivalent ist: Sind v_j die Spalten von V und U_j die von U, und s_j die Diagonalenträge von D, so gilt

$$Av_j = s_j u_j$$

(4) Es gilt für $n \le m$

$$\det A^T A = \prod_{j=1}^n s_j^2$$

Wenn $a_j \in \mathbb{R}^m$ die Spalten von A sind, so ist

$$A^T A = (a_j^T a_k)_{jk}.$$

Die Determinante

$$\det(a_j^T a_k)_{1 \le j,k \le n}$$

heißt Gramsche Determinante. Für $n = 2$ ist sie die Fläche des durch die Vektoren a_1, a_2 definierten Parallelograms in $\mathbb{R}^m$. Für $n = m$ erhalten wir das Quadrat des n dimensionalen Lebesguemasses des von $a_1 \dots a_n$ definierten Parallelepipeds.

Beweis. Nach der Hauptachsentransformation existieren eine orthogonale Matrix V und eine Diagonalmatrix D_1 mit nichtnegativen Einträgen, so dass

$$A^T A = V D_1 V^T.$$

Wir permutieren die Spalten von V so dass die Diagonaleinträge von D_1 monoton fallen und schreiben $V = [V_1, V_2]$, $D_1 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ wobei D genau die nichtverschwindenden Diagonaleinträge enthält. Die $j$te Spalte von V enthält einen Eigenvektor von $A^T A$ zum Eigenwert, der an der j-ten Stelle von D_1 steht. Insbesondere gilt für jeden Spaltenvektor v_j von V_2

$$A^T A v_j = 0$$

und daher

$$|Av_j|^2 = v_j^T A^T A v_j = 0$$

also auch $Av_j = 0$.

Wir definieren $U_1 = AV_1 D^{-1/2}$. Es folgt

$$\begin{aligned} U_1 D^{\frac{1}{2}} V_1^T = & A V_1 D^{-1/2} D^{1/2} V_1^T \\ = & A V_1 V_1^T \\ = & A(V_1 V_1^T + V_2 V_2^T) = AVV^T = A. \end{aligned}$$

Wir ergänzen die Spalten von U_1 zu einer orthogonalen Basis, und damit U_1 zu einer orthogonalen Matrix. □

5.3. **Varianten des Satzes über implizite Funktionen und Umkehrfunktionen.**

Satz 5.9. *a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^d$ $T : U \to \mathbb{R}^d$ eine Abbildung, die für $\varepsilon < 1$ der Lipschitzartigen Bedingung*

$$|T(x_2) - T(x_1) - (x_2 - x_1)| \le \varepsilon |x_2 - x_1|$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ genügt. Dann ist T injektiv und mit $V = T(U)$ gilt für die Umkehrfunktion S

$$|S(y_2) - S(y_1) - (y_2 - y_1)| \le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} |y_2 - y_1|.$$

Die Menge V ist offen, falls U offen ist, und $U = \mathbb{R}^d$ impliziert $V = \mathbb{R}^d$.

Beweis. Aus

$$|T(x_2) - T(x_1)| \le |x_2 - x_1| + |T(x_2) - T(x_1) - (x_2 - x_1)| \le (1+\varepsilon)|x_2 - x_1|$$

folgt die Stetigkeit. Aus

$$|T(x_2) - T(x_1)| \ge |x_2 - x_1| - |T(x_2) - T(x_1) - (x_2 - x_1)| \ge (1-\varepsilon)|x_2 - x_1|$$

folgt die Injektivität und mit $y_1 = T(x_1)$, $y_2 = T(x_2)$ auch

$$\begin{aligned}|S(y_2) - S(y_1) - (y_2 - y_1)| &= |T(x_2) - T(x_1) - (x_2 - x_1)| \le \varepsilon |x_2 - x_1| \\ &\le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} |y_2 - y_1|.\end{aligned}$$

Sei jetzt U offen $B_r(x_0) \subset U$ und $y_0 = T(x_0)$ und $y \in \mathbb{R}^d$. Wir suchen eine Lösung zu

$$T(x) = y$$

was wir als Fixpunktgleichung

$$x = y + (x - T(x))$$

schreiben. Dann ist $x \to \phi(x) = y + x - T(x)$ eine Kontraktion, da

$$|\phi(x_2) - \phi(x_1)| = |T(x_2) - T(x_1) - (x_2 - x_1)| \le \varepsilon |x_2 - x_1|.$$

Sei rekursiv (unter der Annahme, dass $|x_j - x_0| < r$)

$$x_{j+1} = \phi(x_j)$$

Dann ist

$$|x_{j+1} - x_j| \le \varepsilon^j |x_1 - x_0|$$

und

$$|x_j - x_0| \le \frac{1}{1-\varepsilon} |x_1 - x_0| < r$$

falls

$$|x_1 - x_0| = |y - T(x_0)| = |y - y_0| < (1-\varepsilon) r.$$

In diesem Fall konvergiert die Iteration. Damit erhalten wir aber auch die Surjektivität im Fall $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. □

Satz 5.10. *Sei $d \leq n$. Wir schreiben $y = (x, z)$ mit $x \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}^{n-d}$. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $T : U \to \mathbb{R}^n$ genüge*

$$|T(x_2) - T(x_1) - (x_2, 0) - (x_1, 0)| \leq \varepsilon |x_2 - x_1|.$$

Sei

$$V = \{P_1(T(x)) : x \in U\}.$$

Dann existiert genau eine Abbildung $\psi : V \to \mathbb{R}^{n-d}$ mit

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}|x_2 - x_1|$$

und $y = T(x, z)$ genau dann wenn $z = \psi(P_2 y)$. Ist U offen, so gilt das auch für V. Ist $U = \mathbb{R}^d$ so ist auch $V = \mathbb{R}^d$.

Beweis. Wir definieren

$$\tilde{T} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, T(x) = P_1 T(x)$$

Sei $\tilde{S}$ die Umkehrabbildung nach Satz 5.9. Wir Wir definieren

$$\psi(\tilde{x}) = P_2 T(\tilde{S}(\tilde{x})).$$

Dann folgt

$$|\psi(\tilde{x}_2) - \psi(\tilde{x}_1) - (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)| \leq \varepsilon |\tilde{S}(\tilde{x}_2) - \tilde{S}(\tilde{x}_1)| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon})|\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1|$$

Da

$$y = (\tilde{x}, z) = T(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y = (\tilde{T}(x), \psi(\tilde{x})$$

erhalten wir mit Satz 5.9 die gewünschten Eigenschaften. Die Eindeutigkeit folgt sofort. □

[04.12.2018]

[06.12.2018]

Wir definieren einen analogen Satz über implizite Funktionen.

Satz 5.11. *Sei $d = n + m$. Wir schreiben $x = (y, z)$ mit $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$. Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $0 < \varepsilon < 1$ und*

$$T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$$

so dass

$$|T(x_2) - T(x_1) - (z_2 - z_1)| \leq \varepsilon |x_2 - x_1|$$

für $x_1, x_2 \in U$. Sei

$$V = \{(y, \tilde{z}) : \text{ es existiert } z \text{ mit } \tilde{z} = T(y, z)\}$$

Dann ist V offen und es existiert eine Abbildung $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ so dass

$$|\psi(\tilde{x}_2) - \psi(\tilde{x}_1) - (\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1)| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}|\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1|.$$

und

$$T(x, z) = \tilde{z} \Longleftrightarrow z = \psi(x, \tilde{z}). \tag{5.1}$$

Bemerkung: Für festes $\tilde{z}$ definieren wir

$$\mathbb{R}^n \ni x \to (x, \psi(x, \tilde{z})).$$

Diese Abbildung genügt den Annahmen von Satz 5.10.

Beweis. Für $(x,z) \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\tilde{T}(x,z) = (x, T(x,z)).$$

Es gilt

$$|\tilde{T}(y_2) - \tilde{T}(y_1) - (y_2 - y_1)| \le \varepsilon |y_2 - y_1|$$

Sei $\tilde{S}$ die Umkehrfunktion. Wir definieren

$$\psi(\tilde{y}) = P_2 \tilde{S}(\tilde{y}).$$

Es folgt

$$|\psi(\tilde{y}_2) - \psi(\tilde{y}_1) - (\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1)| \le \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} |\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1|$$

und aufgrund der Definition folgt (5.1) Die restlichen Aussagen folgen aus Satz 5.9. □

5.4. **Der Transformationssatz 2.**

Satz 5.12 (Lemma von Sard)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $T \in C^1(U;\mathbb{R}^d)$,*

$$A = \{x \in U : DT(x) \text{ ist nicht invertierbar } \}.$$

Dann ist $m^d(T(A)) = 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $K \subset A$ kompakt. Wir zeigen

$$m^d(T(K)) < \varepsilon.$$

Da dann auch $m^d(T(K)) = 0$ und

$$m^d(T(A)) = \sup\{T(K) : K \subset A \text{ kompakt}$$

folgt daraus die Aussage.
Sei $x_0 \in A$. Wir zeigen nun: Es existiert ein Ball $B_r(x_0) \subset U$, $r \le 1$ so dass

$$m^d(T(B_r(x_0))) < 3^{-d} \varepsilon m^d(B_r(x_0)) \tag{5.2}$$

Wir stellen den Beweis zurück. Offensichtlich ist

$$K \subset \bigcup_{x_0 \in K} B_{r(x_0)/3}(x_0)$$

wobei die Bälle die Eigenschaft (5.2) haben. Nach dem Lemma von Vitali existiert eine endliche Menge disjunkter Bälle $B_{r_j/3}(x_j)$ mit der Eigenschaft (5.2). Damit ist

$$m^d(T(K)) < \varepsilon m^d(\bigcup B_{r_j/3}(x_j)) < \varepsilon m^d(B_1(0)) \left(\frac{\operatorname{diam}(K) + 1}{2} \right)^d.$$

Da ε beliebig war folgt die Aussage. Wir müssen nur noch (5.2) beweisen.
Mit der Singulärwertzerlegung ist

$$DT(x_0) = UDV^T$$

wobei D eine Diagonalmatrix mit nicht negativen Diagonaleinträgen ist. U und V^T sind orthogonale Matrizen. Da

$$m^d(T(A)) = m^d(U^T T(V(V^T A)))$$

dürfen wir annehmen, dass $T'(x_0) = D$. Da $DT(x_0)$ nicht invertierbar ist, ist mindestens einer der Einträge, ohne Einschränkung $s_d = 0$. Wir dürfen also annehmen, dass

$$DT_d(x_0) = 0$$

Für $\tilde{\varepsilon}$ gibt es $r > 0$ so dass

$$|(DT)_d| < \varepsilon$$

Es folgt

$$|T_d(x_2) - T_d(x_1)| \leq \tilde{\varepsilon}|x_2 - x_1| \leq 2\tilde{\varepsilon}r$$

falls $x_2, x_1 \in B_r(x_0)$, siehe auch Punkt 4 weiter unten. Sei

$$A = \sup\{\|DT(x)\|_{\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d} | x \in B_r(x_0)\}.$$

Wir dürfen annehmen, dass $A < \infty$. Dann ist

$$|T(x) - T(x_0)| < Ar$$

für $x \in B_r(x_0)$ und

$$T(B_r(x_0)) \subset B_A(T(x_0)) \cap \{y : |y_d - T(x_0)_d| < \tilde{\varepsilon}$$

und daher

$$m^d(T(B_r(x_0))) \leq 2A^{d-1}\tilde{\varepsilon}r^d$$

$\square$

Satz 5.13 (Transformationssatz, ohne Invertierbarkeit der Ableitung)**.** *Sei*

$$T \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$$

injektiv und $f : T(U) \to \bar{\mathbb{R}}$ nichtnegativ und messbar. Dann gilt

$$\int_U |\det DT| f \circ T dm^d = \int_{T(U)} f dm^d.$$

Die Aussage gilt auch, wenn f messbar ist und eine der Seiten integrier ist.

Sei $A = \{x : \det DT(x) = 0\}$. Nach dem Lemma von Sard ist $T(N)$ eine Nullmenge, und

$$\int_A |\det DT(x)| f \circ T dm^d = 0$$

da die Determinante verschwindet und

$$\int_{T(A)} f dm^d = 0$$

da $T(A)$ eine Nullmenge ist. Aufgrund der Stetigkeit ist $U' = U \backslash A$ offen und die Aussage folgt aus Satz 5.12 und dem Transformationssatz 5.1.

Da die Transformationsformel extrem wichtig ist, führen wir einen zweiten Beweis für Satz 5.1 . Wir verwenden eine Reihe früherer Resulte:

(1) Zunächst erinnern wir an Satz 2.6: Sei T eine invertierbare lineare Abbildung, so gilt für alle messbaren Mengen A

$$m^d(T(A)) = |\det T| m^d(A)$$

wobei wir die Abbildung und die Matrix identifizieren. Es folgt

$$\int |\det T| f \circ T dm^d = \int f dm^d$$

für jede lebesgueintegrierbare Funktion f.

(2) Des weiteren erinnern wir daran, dass das Lebesguemaß mit dem d dimensionalen Hausdorffmaß übereinstimmt (Satz 3.4).

(3) Nach Bemerkung 6 nach der Definition des Hausdorffmaßes gilt für jede Lipschitzstetige Abbildung T mit Lipschitzkonstanten L und jede Lebesguemessbare Menge A

$$m^d(T(A)) = \mathcal{H}^d(T(A)) \le L^d \mathcal{H}^d(A) = L^d m^d(A). \tag{5.3}$$

Lemma 5.14. *Ist $T : U \to V$ eine Homeomorphismus zweier Mengen in $\mathbb{R}^d$, mit*

$$L_1|x_2 - x_1| \le |T(x_2) - T(x_1)| \le L_2|x_2 - x_1|$$

für $x_1, x_2 \in U$ und ist $f : V \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und nicht negativ, so folgt

$$L_1^d \int_V f dm^d \le \int_U f \circ T \le L_2^d \int_V f dm^d$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für charakteristische Funktionen zu beweisen. In diesem Fall folgt sie aus (5.3) □

(4) Auf einer konvexen Menge A gilt mit dem Hauptsatz

$$\begin{aligned} |T(y) - T(x)| &= |\int_0^1 DT(x + t(y - x))dt(y - x)| \\ &\le \sup_{z \in A} \|DT(z)\|_{\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d} |y - x| \end{aligned} \tag{5.4}$$

und daher ist Lipschitzkonstante höchstens so groß wie das Supremum. Das mittlere Integral ist die Matrix, deren Komponenten die Integrale über die Einträge des Integranden sind.

Das sieht man folgendermaßen: Sei $v \in \mathbb{R}^d$ und $f(t) = \langle v, T(x + t(y - x))\rangle$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle v, T(y) - T(x)\rangle &= f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)dt \\ &= \int_0^1 \langle v, DT(x + t(y - x))(y - x)\rangle dt \\ &= \langle v, \int_0^1 DT(x + t(y - x))dt(y - x)\rangle. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \langle v, DT(x + t(y - x))(y - x)\rangle dt \right| \le &\sup_{0 \le t \le 1} \|DT(x + t(y - x))\|_{\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d} \\ &\times |v||y - x|. \end{aligned}$$

Da die (Un-)gleichungen für alle v gelten erhalten wir die obige Aussage.

[06.12.2018]

[11.12.2018]

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem Beweis zu.

Zweiter Beweis von Satz 5.1: (1) Sei $\tilde\varepsilon > 0$ und $x_0 \in U$ mit $\det DT(x_0) \neq 0$. Dann existiert $r > 0$ so dass
(5.5)
$$(1-\tilde\varepsilon)\int_{T(B_r(x_0))} f dm^d \le \int_{B_r(x_0)} |\det DT(x)| f\circ T dm^d \le (1+\tilde\varepsilon)\int_{T(B_r(x_0))} f dm^d$$
für alle $f : T(B_r(x_0)) \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und nichtnegativ.

Wir beweisen diese Aussage. Nach eine Rotation im Bild und im Urbild dürfen wir annehmen, dass $DT(x_0)$ eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen (den Singulärwerten) ist. Diese sind alle > 0. Nach einer weiteren (affinen) linearen Transformation mit einer Diagonalmatrix (so dass x_0 auf x_0 abgebildet wird) dürfen wir annehmen, dass $D\tilde T(x_0) = 1_{\mathbb{R}^d}$, wobei wir einen Faktor $|\det DT(x_0)|$(vor der Transformation) erhalten. Für alle $0 < \varepsilon < 1/2$ existiert ein r so dass

$$|D\tilde T(x) - 1_{\mathbb{R}^d}|_{\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d} < \varepsilon. \tag{5.6}$$

für $|x - x_0| < r$. Daraus folgt für $\phi(x) = \tilde T(x) - x$

$$\|D\phi(x)\|_{\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d} < \varepsilon$$

und auch

$$|\tilde T(x_2) - \tilde T(x_1) - (x_2 - x_1)| < \varepsilon|x_2 - x_1|$$

und insbesondere

$$(1-\varepsilon)|x_2 - x_1| \le |\tilde T(x_2) - \tilde T(x_1)| \le (1+\varepsilon)|x_2 - x_1|.$$

Wir wenden nun Lemma 5.14 an und erhalten für f nichtnegavtiv und messbar:

$$(1-\varepsilon)^d \int_{\tilde T(B_r(x_0))} f dm^d \le \int f\circ\tilde T dm^d \le (1+\varepsilon)^d \int_{\tilde T(B_r(x_0))} f dm^d.$$

Für T bedeutet das mit einem kleineren Radius, den wir wieder mit r bezeichnen, dass

$$(1-\varepsilon)^d \int_{T(B_r(x_0))} f dm^d \le |\det DT(x_0)| \int f\circ T dm^d \le (1+\varepsilon)^d \int_{\tilde T(B_r(x_0))} f dm^d.$$

Da

$$\det DT(x) = \det(DT(x_9)) \det DT(x) DT(x_0)^{\cdot 1} = \det(DT(x_0) \det D\tilde T(x)$$

und wegen (5.6)

$$(1-\varepsilon)^d \le \det D\tilde T(x) \le (1+\varepsilon)^d$$

erhalten wir

$$\Big(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big)^d \int_{T(B_r(x_0))} f dm^d \le |\det DT(x_0)| \int f\circ T dm^d \le \Big(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\Big)^d \int_{\tilde T(B_r(x_0))} f dm^d.$$

Wir wählen ε klein.

(2) Nach den Vorüberlegungen dürfen wir annehmen, dass $DT(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist. Es genügt, den Satz 5.1 für nichtnegative messbare Funktionen zu zeigen, da die Integrale über die Integrale nichtnegativer messbarer Funktionen definiert ist. Wir definieren

$$K_n = \{x \in V : |x| \le n, \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d\backslash V) \le \frac{1}{n}\}.$$

Die Mengen K_n sind kompakt, $T^{-1}(K_n)$ ist kompakt als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung, $V = \bigcup_n K_n$ und daher mit monotoner Konvergenz

$$\int_{K_n} f dm^d \to \int_V f dm^d$$

und

$$\int_{T^{-1}(K_n)} |\det DT| f \circ T dm^d \to \int_V |\det DT| f \circ T dm^d.$$

Wir dürfen also annehmen, dass f einen kompakten Träger $K \subset V$ hat.
(3) Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$. Für alle x existiert $r(x)$ so dass die Aussage in Schritt 1 in $B_{3r(x)}(x)$ gilt. Da K kompakt ist existierten endliche viele derartiger Bälle. Wir wählen r als Minimum dieser endlichen vielen Bällen und dürfen annehmen, dass Schritt 1 in jedem Ball $B_r(x_0)$ mit $x_0 \in K$ gilt.

(4) Wir wählen k so dass $2^k < r/\sqrt{d}$. Dann ist jeder dyadische Würfel, der K schneidet, in einem dieser Bälle enthalten. Insbesondere gilt die Aussage (1) in jedem derartigen dyadischen Würfel. Wir summieren über diese und erhalten

$$(5.7)\quad (1-\tilde{\varepsilon}) \int_{T(K)} f dm^d \le \int_K |\det DT(x)| f \circ T dm^d \le (1+\tilde{\varepsilon}) \int_{T(K)} f dm^d$$

für alle $\tilde{\varepsilon} > 0$, und damit für $\tilde{\varepsilon} = 0$.

□

5.5. **Die Areaformel.**

Satz 5.15 (Areaformel)**.** *Sei $d \le n$, $U \in \mathbb{R}^d$ offen, $T \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt für nichtnegative Borelmessbare Funktionen*

$$\int_U \sqrt{\det((DT)^T DT)} f \circ T dm^d = int_{T(U)} f d\mathcal{H}^d.$$

Allgemeiner ist $f \circ T$ genau dann Lebesguemessbar, wenn $f\chi_{T(U)}$ $\mathcal{H}^d$ messbar ist, und die Formel gilt auch, wenn zusätzlich eine der Seiten integrierbar ist.

Beweis. Zunächst nehmen wir an, $DT(x)$ habe immer den Rang d. Wir gehen wir beim zweiten Beweis der Transformationsformel vor. Wie dort genügt es, eine zu (5.5) analoge Aussage in einem kleinen Ball zu zeigen. Wie dort reduzieren genügt es, den Fall $DT(x_0) = D$ zu betrachten. Wiederum wie beim Transformationssatz machen wir eine lineare Transformation im x Raum, mit den zu $\det(D)$ analogen Faktor bekommen. Es ist wieder das Produkt der Singulärwerte, also $\sqrt{\det(D^T D)} = \sqrt{\det((DT(x_0))^T DT(x_0)}$.
Es genügt also zu zeigen: Ist $DT(x_0)(y) = (y, 0)$ und $\varepsilon > 0$, so existiert $r > 0$ sodass für jede nichtnegative Borelmessbare Funktion f

$$(1-\varepsilon)^d \int_{T(B_r(x_9))} f d\mathcal{H}^d \le \int_{B_r(x_0)} f \circ T dm^d \le (1+\varepsilon)^d \int_{T(B_r(x_0))} f dm^d.$$

Das folgt sobald wenn wir ein $r > 0$ finden, so dass

$$(1-\varepsilon)|x_2 - x_1| \le |T(x_2) - T(x_1)| \le (1+\varepsilon)|x_2 - x_1|$$

was wiederum aus (wie in Satz 5.9

$$|T(x_2) - T(x_1) - ((x_2, 0) - (x_1, 0))| \leq \varepsilon |x_2 - x_1|$$

folgt. Diese Ungleichung wiederum folgt aus

$$\|DT(x) - P_1\|_{\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n} < \varepsilon,$$

was wir in $B_r(x_0)$ durch die Wahl von r erreichen können. Der allgemeine Fall folgt aus dem nächsten Lemma. □

Lemma 5.16. *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $n \geq d$ und $T \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$. Sei*

$$A = \{x : \det DT^{-1}(x) DT(x) = 0\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{H}^d(A) = 0$$

Beweis. Wir definieren für $\varepsilon > 0$ $T_\varepsilon \in C^1(U; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$,

$$T_\varepsilon(x) = (T(x), \varepsilon x)$$

Dann ist der Rang von DT_ε immer d und wir können die Areaformel für diesen Fall anwenden. Außerdem ist

$$DT_\varepsilon^T DT_\varepsilon(x) = DT^T DT + \varepsilon^2 1_{\mathbb{R}^d}$$

und auf kompakten Teilmengen K und $\varepsilon < 1$

$$\det DT^T DT \leq \det DT_\varepsilon^T DT_\varepsilon \leq \det DT^T DT + c_K \varepsilon^2$$

was man sieht, wenn man die Determinante entwickelt, für ein $c_K < \infty$. Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ und

$$K_{\tilde{\varepsilon}} = \{x \in K : \det DT^T(x) DT(x) < \varepsilon^2.$$

Es folgt, da die Projektion P_1 auf die erste Komponente die Norm 1 hat

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^d(T(A \cap K)) &\leq \mathcal{H}^d(T_\varepsilon(A \cap K)) \\
&\leq \mathcal{H}^d(T_\varepsilon(K_{\tilde{\varepsilon}}) \\
&= \int_{T_\varepsilon(K_{\tilde{\varepsilon}})} 1 d\mathcal{H}^d \\
&= \int_{K_{\tilde{\varepsilon}}} \sqrt{\det(DT_\varepsilon)^T DT_\varepsilon} dm^d \\
&\leq \int_{K_{\tilde{\varepsilon}}} \sqrt{(\tilde{\varepsilon})^2 + C_K \varepsilon^2} dm^d \\
&= m^d(K_{\tilde{\varepsilon}} \sqrt{(\tilde{\varepsilon})^2 + C_K \varepsilon^2} \\
&\leq m^d(K) \sqrt{(\tilde{\varepsilon})^2 + C_K \varepsilon^2}
\end{aligned}$$

wobei wir die Areaformel im bewiesenen Fall verwenden. Wir erhalten die Aussage mit $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \to 0$.

□

[11.12.2018]

[13.12.2018]

Beispiele:

(1) $d = 1$, $n \geq 2$. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein regulärer stetig differenzierbarer injektive Weg. Dann ist

$$\mathcal{H}^1(\gamma([a, b]) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

die Länge des Weges.

(2) Sei $n = d + 1$ und $f \in C^1(U)$. Dann ist

$$\mathcal{H}^d(\mathrm{Graph}(f)) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dm^d$$

die Fläche des Graphen ($d = 2$).

(3) Wir wollen $\mathcal{D}(\partial B_1^{\mathbb{R}^d}(0))$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_1^{\mathbb{R}^d}(0)) =& 2\int_{B_1^{\mathbb{R}^{d-1}}(0)} \sqrt{1 + |\nabla \sqrt{1 - |x|^2}|^2} dm^{d-1} \\ =& 2\int_{B_1^{\mathbb{R}^{d-1}}(0)} \sqrt{\frac{1}{1 - |x|^2}} dm^{d-1} \\ =& 2m^{d-1}(B_1(0)) \left(1 + \int_1^\infty 1 - (1 - \frac{1}{t^2})^{\frac{d-1}{2}}\right) dt\end{aligned}$$

Für $d = 3$ erhalten wir

$$2\pi \left(1 + \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt\right) = 4\pi.$$

Alternativ beschreiben wir die zweidimensionale Sphäre durch Polarkoordinaten

$$(\phi, \theta) \to T(\phi, \theta) = (\sin\phi \sin\theta, \cos\phi \sin\theta, \cos\theta)^T, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, 0 < \theta < \pi$$

Diese Parametrisierung läßt Nord- und Südpol aus. Wir berechnen

$$DT(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta & \sin\phi \cos\theta \\ -\sin\phi \sin\theta & \cos\phi \cos\theta \\ 0 & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

und

$$DT^T(\phi, \theta) DT(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin^2(\theta) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie $\sqrt{\det DT^T DT} = \sin\theta$. Wir erhalten

$$\mathcal{H}^2(\partial B_1(0)) = \int_{0 \leq \phi < 2\pi, 0 < \theta < \pi} \sin(\theta) dm^2(\phi, \theta) = 2\pi \times 2 = 4\pi.$$

(4) Wir betrachten die zweidimensionale Fläche

$$A = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^2 = w^3, |z| \leq 1\}$$

Wir definieren die Quadratwurzel als die mit dem positiven Realteil falls z nicht in $(-\infty, 0)$. Wir erhalten eine Parametrisierung der Hälfte der Fläche durch

$$(0, \infty) \times (0, 2\pi) \ni (t, \theta) \to T(t, \theta) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{3}{2}t} \cos(\frac{3}{2}\theta) \\ e^{-\frac{3}{2}t} \sin(\frac{3}{2}\theta) \\ e^{-3t} \cos(3\theta) \\ e^{-3t} \sin(3\theta \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Jacobi matrix

$$DT(t,\theta) = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -e^{-\frac{3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}\theta) & -e^{-\frac{3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}\theta) \\ -e^{-\frac{3}{2}t}\sin(\frac{3}{2}\theta) & e^{-\frac{3}{2}t}\cos(\frac{3}{2}\theta) \\ -2e^{-3t}\cos(3\theta) & -2e^{-3t}\sin(3\theta) \\ -2e^{-3t}\sin(3\theta) & 2e^{-3t}\cos(3\theta) \end{pmatrix}$$

und

$$DT^T DT = \frac{9}{4}e^{-6t}\begin{pmatrix} e^{3t}+4 & 0 \\ 0 & e^{3t}+4 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\sqrt{\det DT^T DT} = \frac{9}{4}(e^{-3t} + 4e^{-6t})$$

und daher

$$\mathcal{H}^2(A) = 9\pi \int_0^\infty e^{-3t} + 4e^{-6t} dt = 9\pi(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = 9\pi/2.$$

(5) Wir versehen die $d \times d$ Matrizen mit der Hilbert-Schmidtnorm. Dadurch werden die Matrizen zu einem euklidschen Vektorraum. Die orthogonalen Matrizen sind eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\frac{d(d+1)}{2}$. Da die Multiplikation mit einer orthogonalen Matriz die Hilbert-Schmidt Norm nicht ändert, definiert das $\alpha = \frac{d(d+1)}{2}$ dimensionale Hausdorffmaß ein Maß auf den orthogonalen Matrizen, das invariant unter der Gruppenmultiplikation ist. Frage: Was ist

$$\mathcal{H}^{\frac{d(d+1)}{2}}(O(d))?$$

Da $O(d)$ kompakt ist und wir einem Ball um jeden beliebigen Punkt nach der Areaformel einen endlichen Wert erhalten, ist das Mass weder 0 noch ∞.

5.6. **Die Coareaformel.** Die Coareaformel ist eine nichtlineare Variante des Satzes von Fubini. Wir betrachten zunächst den linearen Fall, $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ ist durch eine $d \times n$ Matrix A gegeben, die wir wie Vektoren in $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ in Blöcken schreiben, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = (A_1, A_2$. Wir nehmen an, dass A_2 invertierbar ist. Wir definieren

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_1 & A_2 \end{pmatrix}$$

und berechen

$$(A_1, A_2) = A_2(A_2^{-1}A_1, 1)$$

$$\begin{aligned} \det(A_1A_1^T + A_2A_2^T) &= \det(A_1, A_2)(A_1A_2)^T \\ &= \det A_2^{-1}(A_2^{-1}A_1, 1)(A_2^{-1}A_1, 1)^T A_2^{-T} \\ &= (\det A_2)^2 \det(1_{\mathbb{R}^n} + A_2^{-1}A_1A_1^TA_2^{-T}) \end{aligned}$$

sowie

$$\det \tilde{A} = \det A_2.$$

Dann ist mit der Areaformel, dem Satz von Fubini und dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{A^{-1}(z)} f d\mathcal{H}^{d-n}\, dm^n(z) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int \sqrt{\det(1_{\mathbb{R}^{d-n}} + A_1^T A_2^{-T} A_2^{-1} A_1)}\times \\
&\quad \times f\circ \tilde{A}^{-1}(y,z) dm^{d-n}(y) dm^{d-n}(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\det(1_{\mathbb{R}^{d-n}} + A_1^T A_2^{-T} A_2^{-1} A_1)}\times \\
&\quad \times f\circ \tilde{A}^{-1}(y,z) dm^d(y,z) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\det \tilde{A}| \sqrt{\det(1_{\mathbb{R}^{d-n}} + A_1^T A_2^{-T} A_2^{-1} A_1)} f dm^d
\end{aligned}$$

und die Ausage folgt, sobald wir zeigen, dass für jede $d\times n$ Matrix B

$$\det(1_{\mathbb{R}^n} + B^T B) = \det(1_{\mathbb{R}^d} + BB^T).$$

Wir verwenden die Singulärwertzerlegung, $B = UDV^T$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\det(1_{\mathbb{R}^n} + B^T B) &= \det(U(1_{\mathbb{R}^n} + D^T V^T V D)U) \\
&= \det(1_{\mathbb{R}^n} + D^T D) \\
&= \prod_{j=1}^n (1+s_j^2) \\
&= \det(1_{\mathbb{R}^d} + DD^T) \\
&= \det(1_{\mathbb{R}^d} + BB^T).
\end{aligned}$$

Lemma 5.17. *Sei $n<d$, $U\subset \mathbb{R}^d$ offen und $T\in C^1(U\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n)$. $f:\mathbb{R}^d\to \mathbb{R}$ sei Lebesguemessbar und nichtnegativ oder $\sqrt{DTDT^T}f$ sei integrierbar. Dann gilt*

$$\int_U \sqrt{\det(DTDT^T)} f dm^d = \int\int_{T^{-1}(y)\cap U} f d\mathcal{H}^{d-n} dm^n(y)$$

Beweis. Es genügt, f nichtnegativ und Borel messbar zu betrachten. Sei $x_0\in U$. Es genügt, die Aussage in einem Ball um x_0 zu zeigen. Mit der Singulärwertzerlegung können wir

$$DT(x_0) = UDV^T$$

schreiben und nach einer Rotation in Bild und Urbild dürfen wir annehmen, dass $DT(x_0) = D = (0, D_0)$ wobei D_0 eine invertierbare Diagonalmartix ist. Wir wählen $r>0$ so dass mit $DT(x) = (D_1T(x), D_2T(x))$ $D_2T(x)$ für $|x-x_0|<r$ invertierbar ist. Wir definieren

$$\tilde{T}(x) = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ T(x) \end{pmatrix}$$

Die Jacobimatrix ist

$$D\tilde{T}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_1T(x) & D_2T(x) \end{pmatrix}$$

Sie ist in x_0 invertierbar und daher existiert r so dass mit $V = \tilde{T}(B_r(x_0)$

$$\tilde{T}: B_r(x_0) \to V$$

ein Diffemorphismus ist und so dass $D_2T(x)$ in diesem Ball invertierbar ist. Dann ist für $(x_1,x_2)^T \in B_r(x_0)$

$$T(x_1,x_2)^T = z \quad (x_1, T(x_1,x_2)^T) \in V \text{ und } (x_1,x_2)^T = \tilde{T}^{-1}(x_1,z)^T.$$

Wir wiederholen nun unter Verwendung von

$$J_1 = [\det(1_{\mathbb{R}^{n-d}} + D_1T^T(D_2T)^{-T}(D_2T)^{-1}D_1T)]^{\frac{1}{2}}$$

und

$$J_2 = |\det D_2T|$$

und der aus der obigen Rechnung folgenden Identität

$$J_1J_2 = (\det DTDT^T)^{\frac{1}{2}}$$

die Rechnung für den linearen Fall mit Areaformel, Fubini und Transformationssatz

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{B_r(0)\cap T^{-1}(z)} f d\mathcal{H}^{d-n} dm^n &= \int\int_{\{(y,z)^T\in V} f\circ T^{-1}\, dm^{d-n}\, dm^n(z)\\ &= \int_V J_1 f\circ T^{-1})dm^d\\ &= \int_{B_r(x_0)} J_2J_1 f\circ T^{-1})dm^d\\ &= \int_{B_r(x_0)} (\det DTDT^T)^{\frac{1}{2}} f dm^d\end{aligned}$$

wobei die erste Gleichheit aus der Areaformel, die zweite aus Fubini, und die dritte mit dem Transformationssatz folgt. □

Beispiele:

(1) Sei $n=1$ und $T\in C^1(U)$ mit $DT(x)\neq 0$ in U. Dann folgt

$$\int_U |DT| f dm^d = \int\int_{T^{-1}(z)\cap U} f d\mathcal{H}^{d-1}\, dz$$

(2) Sei $U = \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ und $T(x) = |x|$. Dann ist $\nabla T(x) = x/|x|$ sowie $DTDT^T(x) = 1$ und

$$\int_U f dm^d = \int_0^\infty \int_{\partial B_r(0)} f d\mathcal{H}^{d-1} dr.$$

Da

$$\int_{\partial B_r(0)} f d\mathcal{H}^{d-1} = r^{d-1}\int_{\partial B_1(0)} f(rx) d\mathcal{H}^{d-1}(x)$$

erhalten wir die äquivalente Form

$$\int_U f dm^d = \int_0^\infty r^{d-1}\int_{\partial B_1(0)} f(rx) d\mathcal{H}^{d-1} dr$$

(3) Sei nun $f(x) = g(|x|)$. Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^d\backslash\{0\}} g(|x|) dm^d(x) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_1(0))\int_0^\infty r^{d-1} g(r) dr$$

(4) Wir erhalten
$$\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d+2}{2})} = \int_{B_1(0)} dm^d = \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_1(0)) \int_0^1 r^{d-1} = \frac{1}{d}\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_1(0))$$
und daher
$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_1(0)) = d\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d+2}{2})} = 2\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$
Für $d = 1$ ist $\mathcal{H}^0(\partial B_1(0)) = 2$, $m^1(B_1(0)) = 2$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Für $d = 2$ erhalten wir wieder $\mathcal{H}^1(\partial B_1(0)) = 2\pi$, für $d = 3$ $\mathcal{H}^2(\partial B_1(0)) = 4\pi$ und für $d = 4$
$$\mathcal{H}^3(\partial B_1^{\mathbb{R}^4}(0)) = 2\frac{\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2$$

[13.12.2018]

[18.12.2018]

5.7. **Die Zerlegung der Eins und der Satz von Gauß.**

Lemma 5.18. *Es existiert eine beliebig oft differenzierbare Funktion $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, die Werte zwischen 0 und 1 annimmt, mit Träger $\overline{B_2(0)}$, und $\phi(x) = 1$ für $|x| \le 1$.*

Beweis. Aus der Analysis 1 wissen wir, dass
$$f(t) = \begin{cases} e^{-t^{-1}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \le 0 \end{cases}$$
eine beliebig oft differenzierbare Funktion ist, die Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Die Funktion
$$f(4 - |x|^2) + f(|x|^2 - 1)$$
ist beliebig oft differenzierbar und nimmt positive Werte an. Der zweite Summand ist 0 für $|x| \le 1$.
Wir definieren nun
$$\phi(x) = \frac{f(4 - |x|^2)}{f(4 - |x|^2) + f(|x|^2 - 1)}$$
Die Funktion g ist beliebig oft differenzierbar, ihr Träger liegt ist $\overline{B_2(0)}$ und sie nimmt auf $B_1(0)$ den Wert 1. Sie nimmt Werte zwischen Null und 1 an. □

Satz 5.19. *Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und U_n, $1 \le m \le M$ eine Überdeckung von K. Dann existieren Funktionen $\phi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit Träger in U_m so dass für $x \in K$*
$$\sum_{m=1}^M \phi_m(x) = 1$$

Beweis. Da $\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \backslash (\bigcup_M U_m)) > 0$ können wir $\delta > 0$ wählen, so dass
$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(x, K) \le \delta\} \subset \bigcup_{m=1}^M U_m$$

und

$$\operatorname{dist}(K_\delta, \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{m=1}^M U_m) > \delta$$

Für alle $x \in K_\delta$ existiert ein $0 < r(x) < \delta/3$ und ein $m(x)$ so dass $B_{3r(x)} \subset U_{m(x)}$ liegt. Da K_δ kompakt ist existieren endlich viele derartige Bälle, so dass

$$K_\delta \subset \bigcup_{n=1}^N B_{r(x_n)}(x_n).$$

Sei $r = \min \tilde r_n$. Dann liegt $B_r(x)$ mit $x \in K$ in einem der Bälle $B_{3r_n(x_n)}$. Wir definieren mit ϕ aus dem vorigen Lemma

$$\tilde\phi_m(x) = \sum_{n: m(x_n)=m, B_{2r(x_n)}(x_n)\cap K \neq \{\}} \phi((x-x_n)/r(x_n))$$

und

$$\tilde\phi_0(x) = \sum_{n: B_{2r(x_n)}(x_n)\cap K = \{\}} \phi((x-x_n)/r(x_n)).$$

Dann ist $\tilde\phi_m \in C^\infty$, $\sum_{m=0}^M \phi_m > 0$ auf K_δ, Es gilt $\operatorname{supp} \tilde\phi_m \subset U_m \cap K_\delta$ für $m \geq 1$, $\tilde\phi_m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$\sum_{m=1}^M \tilde\phi_m(x) = \sum_{m=0}^M \tilde\phi_0(x)$$

für $x \in K$. Wir definieren

$$\phi_j = \begin{cases} \frac{\tilde\phi_j}{\sum_{m=0}^M \tilde\phi_m(x)} & \text{falls } x \in K_\delta \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Konstruktion ist $0 \leq \phi_j$, $\sum_{m=1}^M \phi_m \leq 1$, $\operatorname{supp} \phi_m \subset U_m$ und $\sum_{m=1}^M \phi_m(x) = 1$ für $x \in K$. □

Lemma 5.20. *Sei $G = [a,b] \times (c,d) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f : C(G)$ sei stetig. Dann ist*

$$(c,d) \ni y \to \int_a^b f(x,y)dx$$

stetig. Ist f zusätzlich bzgl der zweiten Koordinate differenzierbar und ist $\partial_y f$ stetig auf G, so ist

$$(c,d) \ni y \to \int_a^b f(x,y)dx$$

stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \partial_y f(x,y)dx$$

Beweis. Sei $y_0 \in (c,d)$, $c < c_0 < y_0 < d_0 < d$. Dann ist $f|_{[a,b]\times[c_0,d_0]}$ stetig auf einer kompakten Menge und daher beschränkt. Da

$$f(x,y) \to f(x,y_0) \qquad \text{für } y \to y_0$$

ist nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue für jede Folge $y_n \to y_0$

$$\int_a^b f(x, y_n)dx \to \int_a^b f(x, y_0)dx$$

und damit ist

$$y \to \int_a^b f(x, y)dx$$

stetig.

Sei jetzt f stetig nach y differenzierbar. Dann ist auch $\partial_y f|_{[a,b]\times[c_0,d_0]}$ eine stetige Funktionen auf einer kompakten Menge und daher beschränkt. Sei

$$\max\{|f(x, y)|, |\partial_y f(x, y)|\} \le C$$

für $x \in [a, b], y \in [c_0, d_0]$. Dann ist mit dem Hauptsatz

$$\left|\frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h}\right| \le C$$

für $|h| \le \min\{d_0 - y_0, y_0 - c_0\}$. Außerdem ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} = \partial_y f(x, y_0)$$

für alle $x \in [a, b]$. Mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue (wieder zunächst für jede Folge) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x, y_0 + h)dx - \int_a^b f(x, y_0)dx\right) \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \int_a^b \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} dx = \int_a^b \partial_y f(x, y_0)dx.
\end{aligned}$$

Stetigkeit der Ableitung folgt mit dem ersten Teil. □

Definition 5.1. *Es sei $G \subset \mathbb{R}^d$ offen und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k \ge 1$.*

(1) *Ein Punkt $a \in \partial G$ heißt C^k regulärer Randpunkt von G, falls eine offene Umgebung U von a existiert sowie eine Funktion $\rho \in C^k(U, \mathbb{R})$ mit $\nabla\rho(x) \neq 0$ in U und*

$$G \cap U = \{x \in U : \rho < 0\}.$$

(2) *Die Menge der C^k regulären Randpunkte heißt regulärer C^k Rand, $\partial_r^k G$. Das Komplement $\partial_s^k G = \partial G \backslash \partial_s^k G$ heißt C^k singulärer Rand.*
(3) *Eine beschränkte offene Menge $G \subset \mathbb{R}^d$ heißt C^k Polyeder, falls ihr regulärer C^k Rand in ∂G dicht ist und*

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial_s^k G) = 0.$$

Bemerkungen

(1) Sei $a \in \partial_r^k G$ und U und ρ wie in der Definition. Dann ist 0 ein regulärer Wert von ρ, d.h. $\nabla\rho \neq 0$ in einer Umgebung, und damit $\partial G \cap U$ in dieser Umgebung eine Mannigfaltigkeit der Dimension $d - 1$. Umgekehrt folgt aus $\rho(x) = 0$ dass $x \in \partial G$. Sei $h \in \mathbb{R}^d$ ein Vektor mit $\nabla\rho(x) \cdot h > 0$. Dann ist

$$\frac{d}{dt}\rho(x + th)|_{t=0} = D\rho(x)h > 0.$$

Dann existiert $T > 0$ sodass $\rho(x+th) < 0$ für $-T < t < 0$ und $\rho(x+th) \geq 0$ für $0 \leq t \leq T$ und damit liegt x im Rand.

(2) Dann gibt es genau einen Einheitsnormalenvektor $n(x)$ mit $|n(x)| = 1$ und $\rho(x+tn) > 0$ für $t > 0$ klein. Er ist durch

$$n(x) = \frac{\nabla \rho(x)}{|\nabla \rho(x)|}$$

gegeben.

(3) Ist $\psi \in C^1(\mathbb{R}^{d-1})$ und $G = \{x \in \mathbb{R}^d : x_d < \psi(x')\}$, so ist

$$\partial G = \{(x', \psi(x')) : x' \in \mathbb{R}^{d-1}\}.$$

Der Tangentialraum wird durch die $d-1$ Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_j \psi(x') \end{pmatrix}$$

aufgespannt, wobei die 1 an der j ten Stelle steht. Wir definieren

$$\rho(x) = x_d - \psi(x').$$

Dann ist $G = \{x : \rho(x) < 0\}$ und $\partial G = \partial_r^1 G$. Der äußere Einheitsnormalenvektor

$$n(x', \psi(x)) = (-\nabla\psi(x'), 1) = \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|}$$

Definition 5.2. *Sei $G \subset \mathbb{R}^d)$ offen und $F \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$. Wir definieren die Divergenz durch*

$$\nabla \cdot F = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} F_j(x)$$

Der Satz von Gauß verallgemeinert den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

Satz 5.21 (Satz von Gauß)**.** *Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein C^1 Polyeder mit äußerem Einheitsnormalenvektorfeld $n \in C(\partial_r^1 G; \mathbb{R}^d)$ und $F \in C(G \cup \partial_r G; \mathbb{R}^d)$ ein beschränktes Vektorfeld mit $F|_G \in C^1(G; \mathbb{R}^d)$, $\langle F, n\rangle \in L^1(\partial G; \mathcal{H}^{d-1})$ und $\nabla \cdot F \in L^1(G, m^d)$. Dann ist*

$$\int_G \nabla \cdot F dm^d = \int_{\partial G} \langle F, n\rangle d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Ist $\mathcal{H}^{d-1}(\partial G) < \infty$, so ist die Integrierbarkeitsbedingung für alle beschränkten Vektorfelder automatisch erfüllt.

Wir betrachten zunächst einen Spezialfall.

Lemma 5.22. *Sei R ein offener Würfel in $\mathbb{R}^{d-1}$, $c < d \in \mathbb{R}$, $\psi \in C^1(R;(c,d))$, $U = R \times (c,d)$ und*

$$G := \{(x', x_d) \in U : x_d < \psi(x')\}$$

Sei $F \in C(\overline{G};\mathbb{R}^d)$ und $F|_G \in c^1(G;\mathbb{R}^d)$, $\nabla \cdot F \in L^1(G)$ und $\operatorname{supp} F \subset U$. Dann ist

$$\int_G \nabla \cdot F dm^d = \int_{\partial G} F \cdot n(x) d\mathcal{H}^{d-1}.$$

[18.12.2018]

[20.12.2018]

Beweis. Wir berechnen für $\varepsilon > 0$ aber klein (so dass $\psi(x') > c + \varepsilon$ ist) mit $G_\varepsilon = \{x \in G : c < x_d < \psi(x') - \varepsilon\}$

$$\begin{aligned}\int_G \partial_{x_d} F_d dm^d &= \int_R \int_c^{\psi(x')-\varepsilon} \partial_{x_d} F_d(x', x_d) dx_d dm^{d-1} \\ &= \int_R F_d(x', \psi(x') - \varepsilon)\end{aligned}$$

und, mit $1 \leq j < d$

$$\begin{aligned}\int_G \partial_{x_j} F_j dm^d &= \int_R \int_0^{\psi(x')-\varepsilon} \partial_j F_j dx_d dm^{d-1} \\ &= \int_R \partial_{x_j} \int_0^{\psi(x')-\varepsilon} F_j dx_d dm^{d-1} - \int_R \partial_{x_j} \psi(x') F_j dm^{d-1}\end{aligned}$$

Der erste Term ist 0. Da

$$n(x' m \psi(x')) = (1 + |\nabla' \psi(x')|^2)^{-\frac{1}{2}} (-\nabla' \psi, 1)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{G_\varepsilon} \nabla \cdot F dm^d &= \int_R \sum \sqrt{1 + |\nabla' \psi|^2} n_j F_j(x', \psi(x') - \varepsilon) dm^{d-1} \\ &= \int_{\partial G} n \cdot F(x', x_d - \varepsilon) d\mathcal{H}^{d-1}.\end{aligned}$$

Beide Seiten konvergieren mit $\varepsilon \to 0$. □

Lemma 5.23. *Die Aussage des Satzes gilt, falls $\operatorname{supp} v$ kompakt in $G \cup \partial_r^1 G$ ist.*

Beweis. Sei

$$K = \operatorname{supp} F \subset G \cup \partial_r^1 G, \quad K_b = \operatorname{supp} F \cap \partial G$$

Wir nehmen zunächst an, dass zusätzlich $F(x) = 0$ für $x \in \partial G$. Wir setzen F durch Null in $\mathbb{R}^d \backslash G$ fort und bezeichnen die Funktion wieder mit F. Dann ist $F|_{\partial G} = 0$ und das Randintegral ist Null. Mit Fubini und dem Hauptsatz gilt

$$\int_G \partial_j F_j dm^d = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j F_j dm^d = \int_{\mathbb{R}^d_j} \int \partial_j F_j dx_j dm^{d-1}(\hat{x}_j)$$

wobei $\mathbb{R}^d_j$ der $d-1$ dimensionale Raum ist, den wir erhalten, wenn wir die $j$te Koordinate weglassen. Das innere Integral ist eine Summe über Integrale disjunkter kompakter Intervalle, auf denen F_j stetig differenzierbar ist, und auf deren Rand F_j verschwindet. Die Integral verschwinden nach dem Hauptsatz.

Sei jetzt $a \in \partial_r^1 G$ und $n(a)$ die äußere Normale. Wir zeigen: Es existiert $r(a) > 0$, so dass die Integralformel gilt, falls $\operatorname{supp} F \in B_{r(a)}(a) \cap \bar{G}$. Den Beweis stellen wir zurück.

Sei jetzt $K \subset G \cup \partial_r^1 G$. Insbesondere ist $K \cap \partial_r^1 G$ abgeschlossen und daher auch kompakt in $\mathbb{R}^d$. Es gilt

$$K \cap \partial_r^1 G \subset \bigcup_{a \in K \cap \partial_r^1 G} B_{r(a)}(a).$$

Daher existieren endliche viele a_n, so dass die Bälle $K \cap \partial_r^1 G$ überdecken. Sei jetzt $(\phi_k)_{1 \le k \le K}$ eine zugehörige (subordinierte) Zerlegung der Eins und $F^k = \phi_k F$ und $F^0 = (1 - \sum_{k=1}^K \phi_k) F$. Dann gilt

$$\int \nabla \cdot F^k dm^d = \int_{\partial G} \langle F^k \cdot \rangle d\mathcal{H}^{d-1}$$

für alle n und daher

$$\int \nabla \cdot F dm^d = \sum_{k=0}^K \int \nabla \cdot F^k dm^d = \sum_{k=0}^K \int_{\partial G} \langle F^k \cdot \rangle d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial G} \langle F \cdot \rangle d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Nur die Behauptung ist noch zu zeigen. Mindestens eine der Komponenten von $n(a)$ ist $\ge 1/d$. Ohne Einschränkung sei dies x^d. Dann folgt die Aussage mit Lemma 5.22. $\square$

Beweis von Satz 5.21: Sei F wie im Satz und $\varepsilon > 0$. Da nach Voraussetzung $\mathcal{H}^{d-1}(\partial_s^1 G) = 0$ existieren Bälle $B_{r_n(x_n)}$ mit

$$m^d(B_1(0)) \sum_{n=1}^\infty (2r_n)^{d-1} < \varepsilon$$

und

$$\partial_s^1 G \subset \bigcup B_{r_n}(x_n).$$

Da $\partial_s^1 G$ kompakt ist, genügt es, endlich viele (sagen wir N) Bälle zu nehmen. Mit ϕ aus Lemma 5.18, $\phi_n(x) = \phi((x - x_n)/r_n)$. Dann ist $\operatorname{supp} \phi_n = \overline{B_{2r_n}(x_n)}$, $\phi_n = 1$ auf $B_{r_n}(x_n)$. Außerdem existiert ein C so dass

$$|\nabla \phi_n| \le C/r_n$$

Wir definieren

$$\alpha_\varepsilon = \prod_{k=1}^K (1 - \phi_k(x)) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Dann ist $\alpha_\varepsilon(x) = 0$ falls $\operatorname{dist}(x, \partial_s^1 G) \le \varepsilon$, $\alpha_\varepsilon(x) = 1$ falls $\operatorname{dist}(x, \partial_s^1 G) \ge \varepsilon$, α_ε nimmt nur Werte in $[0,1]$ an und

$$|\nabla \alpha_\varepsilon| \le C \sum_{n=1}^N r_n^{-1} \chi_{B_{2r_n}(x_n)}.$$

Dann gilt

$$\int \nabla(\alpha_\varepsilon F) dm^d = \int \langle \alpha_\varepsilon F, n \rangle d\mathcal{H}^{d-1}$$

und nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue

$$\int \langle \alpha_\varepsilon F, n\rangle d\mathcal{H}^{d-1} \to \int \langle F, n\rangle d\mathcal{H}^{d-1}$$

da die rechte Seite von

$$|\langle \alpha_\varepsilon F, n\rangle| \le |\langle F, n\rangle|$$

eine integrierbare Majorante ist und

$$\langle \alpha_\varepsilon F, n\rangle \to \langle F, n\rangle$$

für $x \in \partial_r^1 G$.
Wir beschliessen den Beweis durch

$$\int_G \nabla \cdot (1-\alpha_\varepsilon) F dm^d dm^d = \int_G (1-\alpha_\varepsilon)\nabla \cdot F dm^d - \int_G \langle \nabla \alpha_\varepsilon, F\rangle dm^d.$$

Der erste Summand konvergiert gegen Null mit $\varepsilon \to 0$ mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue. Für den zweiten Term schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} \left| \int_G \langle \nabla \alpha_\varepsilon, F\rangle dm^d \right| \le & \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^K r_k^{-1} \chi_{B_r(x_k)} dm^d \\ \le & m^d(B_1(0)) \sum r_k^{d-1} \operatorname{supp}\{|F| : x \in G\} \\ \le & \varepsilon \operatorname{supp}\{|F| : x \in G\} \end{aligned}$$

□

Beispiel: Wir erhalten wieder eine Formel, die das Maß der Sphäre und das Maß eines Einheitballes verknüpft. Sei $F(x) = x$. Dann ist $\nabla \cdot F = d$ und

$$m^d(B_1(0)) = \int_{B_1(0)} \nabla \cdot x dm^d = \int_{\partial B_1(0)} \langle x, x\rangle d\mathcal{H}^{d-1} = \mathcal{H}^{d-1}(\partial B_1(0)).$$

Mit allgemeinen Radien ist

$$dr^{-d} m^d(B_r(0)) = r^{d-1}\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_r(0))$$

und

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial B_r(0)) = (dm^d(B_r(0)))^{\frac{d-1}{d}}.$$

Die isoperimetrische Ungleichung besagt, dass für jede messbare Menge A

$$\mathcal{H}_*^{d-1}(\partial A) \ge (dm^d(A))^{\frac{d-1}{d}}$$

und konkret für $d = 2$

$$\mathcal{H}^1(\partial A) \ge (2m^2(A)^{\frac{1}{2}}.$$

Für eine $d \times d$ Matrix A ist die adjunkte Matrix

$$A^\sharp_{ij} = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & | & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ - & - & (ji) & - & - \\ \vdots & \ddots & | & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & | & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

die Matrix der Cofaktoren, der Determinanten der Matrix, die durch Streichen der j ten Zeile und $i$ten Spalte entsteht. Dann ist

$$\det(A) = \sum_{i,j=1}^{d} A^{\sharp}_{ij} a_{ji}.$$

Lemma 5.24. *Sei $g \in C^2(U;\mathbb{R}^d)$. Dann ist für $1 \le i \le d$*

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j D g^{\sharp}_{ji}(x) = 0.$$

Beweis.

$$\partial_j D g^{\sharp}_{ji} = \sum_{k=1}^{d} (-1)^{i+j} \left(\partial_1 g^i, \dots \partial_{j-1} g^i, \widehat{\partial_j} g^i, \dots \partial^2_{jk} g^i, \dots \partial_d g^i \right) = (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^{d} A_{kj}$$

Mit dem Satz von Schwarz erhalten wir $A_{kj} = (-1)^{k-j-1} A_{jk}$. Wir schreiben

$$(-1)^i \sum_{j=1}^{d} \partial_j D g^{\sharp}_{ji} = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k<j} \dots \quad + \sum_{k>j} .. =: S_1 + S_2$$

mit

$$S_2 = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k>j} (-1)^{k-1} A_{jk} = \sum_{k<j} (-1)^{j-1} A_{kj} = -S_1.$$

□

Satz 5.25 (Brouwersche Fixpunktsatz)**.** *Jede stetige Abbildung $f : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ hat einen Fixpunkt.*

Lemma 5.26. *Es gibt keine stetige Abbildung*

$$f : \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$$

mit $f(x) = x$ für $|x| = 1$.

Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Sei f eine Abbildung wie im Satz, aber ohne Fixpunkt. Da

$$\overline{B_1(0)} \ni x \to |f(x) - x|$$

nie Null ist, die Abbildung stetig und das Urbild kompakt ist existiert $\delta > 0$ mit $|f(x) - x| > \delta$ für alle x. Für jedes x schneidet der Strahl von $h(x)$ nach x $\partial B_1(0)$ in einem Punkt y. Die Abbildung

$$\overline{B_1(0)} \ni x \to y \in \partial B_1(0)$$

ist stetig (man bestimme eine Formel für y). □

Beweis. Wir beweisen Lemma 5.26 unter der stärkeren Annahme, dass sogar $f \in C^2(\overline{B_1(0)}; \partial B_1(0))$ mit $f(x) = x$ für $x \in \partial B_1(0)$ gilt. Wir defnieren

$$g(t,x) = (1-t)x + t f(x)$$

und

$$F(t) = \int_{B_1(0)} \det Dg \, dx.$$

Dann ist

$$F(0) = m^d(B_1(0))$$

und nach dem Lemma von Sard $F(1) = 0$. Wir berechnen

$$\frac{d}{dt}F(t) = \int_{B_1(0)} \frac{\partial}{\partial t} \det Dg dm^d. \tag{5.8}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \det Dg =& \sum_{j=1}^{d} \det(\partial_1 g, \dots, \partial^2_{tj} g, \dots \partial_d g) \\
=& \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} Dg^\sharp_{kj} \partial_t \partial_k g_j \\
=& \sum_{j,k=1}^{d} \partial_k((\partial_t g_j) Dg^\sharp_{kj})
\end{aligned}$$

nach Lemma 5.24. Damit ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) =& \int_{B_1(0)} \nabla \cdot (\sum_{j=1}^{d} (\partial_t g_j) Dg^\sharp_{kj}) dm^d \\
=& \int_{\partial B_1(0)} \langle x, \Big(\sum_{j=1}^{d} (\partial_t g_j) Dg^\sharp_{kj} \Big)_k \rangle d\mathcal{H}^{d-1} \\
=& 0
\end{aligned}$$

da $g_t(t,x) = f(x) - x = 0$ für $|x| = 1$. □

[20.12.2018]

[08.01.2019]

6. Die Lebesgueräume $L^p(\mu)$

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. In diesem Kapitel werden wir Banachräume von Äquivalenzklassen von Funktionen betrachten. Zur Erinnerung:

(1) $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt integrierbar, falls f messbar ist und
$$\int \max\{f, 0\} d\mu < \infty, \qquad \int \max\{-f, 0\} d\mu < \infty$$
was äquivalent zu f messbar und
$$\int |f| d\mu < \infty$$
ist.

(2) Wir definieren eine Äquivalenzrelation
$$f \sim g \qquad \text{genau dann wenn} \qquad f = g \text{ fast überall.}$$
Ist $f \sim g$, so ist f genau dann integrierbar wenn g integrierbar ist. Außerdem gilt dann
$$\int |f| d\mu = \int |g| d\mu.$$
Sei jetzt f integrierbar und $\tilde{f}$ die Äquivalenzklasse. Wir haben
$$\|\tilde{f}\|_{L^1(X,\mu)} = \|\tilde{f}\|_{L^1(\mu)} = \|\tilde{f}\|_{L^1} = \int |f| d\mu$$
definiert und bezeichnen den Raum der Äquivalenzklassen integrierbarer Funktionen mit $L^1(X, \mu) = L^1(\mu) = L^1$.

(3) Der Raum $L^1(X, \mu)$ ist ein Banachraum. Die Abbildung
$$L^1(\mu) \ni \tilde{f} \to \int f d\mu$$
wobei f ein Vertreter der Äquivalenzklasse ist, ist eine stetige lineare Abbildung der Norm 1. Es gilt
$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$
für jede integrierbare Funktion.

6.1. **Die Lebesgueräume.**

Definition 6.1. *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Wir sagen, $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist p integrierbar, falls f messbar ist und*

(1) *$|f|^p$ integrierbar ist für $p < \infty$*
(2) *eine Nullmenge N existiert, außerhalb derer f beschränkt ist, falls $p = \infty$.*

Wir sagen, $f : X \to \mathbb{C}$ ist p integrierbar, wenn Real- und Imaginärteil p integrierbar sind.

Ist f p integrierbar und $\tilde{f}$ die Äquivalenzklasse, so schreiben wir

$$\|\tilde{f}\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} & \text{falls } 1 \le p < \infty \\ \inf\{\sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| : N \text{ ist Nullmenge } \} & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

Wir bezeichnen den Raum der Äquivalenzklassen p integrierbarer Funktionen mit $L^p(\mu)$ bzw L^p.

Bemerkung: Das Infimum im Fall ∞ wird angenommen. f ist genau dann p integrierbar, wenn es messbar ist und $\|\tilde{f}\|_{L^p} < \infty$.

Lemma 6.1 (Young)**.** *Sei $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle komplexen Zahlen x, y*

$$|xy| \le \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q.$$

Wir erhalten Gleichheit genau dann wenn $x = \pm|y|^{q-1}$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass für $1 < p, q < \infty$ (Multiplikation der linken Gleichung mit pq)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \Longleftrightarrow pq = p + q.$$

Es genügt, die Aussage für $x, y > 0$ zu zeigen. Die Abbildung

$$x \to \phi(x) = \frac{1}{p}|x|^p - xy + \frac{1}{q}\frac{|}{y}|^q$$

ist strikt konvex: $\phi'' = (p-1)x^{p-1} > 0$. Für $x = y^{q-1}$ ist $x^p = y^{p(q-1)} = y^q$ da

$$p(q-1) = q \Longleftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und $\phi(y^{q-1}) = 0$. Da $\phi'(y^{q-1}) = y^{(p-1)(q-1)} - y$ und $(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = 1$ erhalten wir mit der der Taylorformel

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi''(\xi)(x - y^{q-1})^2 \ge 0$$

Damit ist $\phi(x) \ge 0$. $\square$

Satz 6.2 (Höldersche Ungleichung)**.** *Sei $1 \le p, q \le \infty$ und*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

f p integrierbar und g q integrierbar. Dann ist fg integrierbar und

$$\left| \int fg d\mu \right| \le \|\tilde{f}\|_{L^p} \|\tilde{g}\|_{L^q}$$

Das Integral auf der linken Seite hängt nur von den Äquivalenzklassen ab.

Bemerkung: Der Fall $p = q = 2$ ist die Cauchy-Schwarzungleichung

$$\left| \int fg d\mu \right| \le \|\tilde{f}\|_{L^2} \|\tilde{g}\|_{L^2}$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $p = 1$ und $q = \infty$. Dann ist für jede Nullmenge

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \int |f||g| d\mu \leq \int |f| d\mu \sup\{|g(x)| : x \in X \backslash N\}$$

und damit folgt die Aussage in diesem Fall. Sei jetzt $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist für alle $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \left| \int fg d\mu \right| &\leq \int |\lambda f||\lambda^{-1} g| d\mu \\ &\leq \int \frac{1}{p} |\lambda f|^p + \frac{1}{q} ||\lambda|^{-1} g|^q d\mu \\ &= \frac{1}{p} \lambda^p \|\tilde{f}\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \lambda^{-q} \|\tilde{g}\|_{L^q}^q \end{aligned}$$

Falls $\|\tilde{f}\|_{L^p} = 0$, so ist $f = 0$ fast überall und $\int fg d\mu = 0$. Dann ist nichts zu zeigen. Das Gleiche gilt falls $\|\tilde{g}\|_{L^q} = 0$. Wir nehmen also an: $\|\tilde{L}^p > 0$ und $\|\tilde{g}\|_{L^q} > 0$. Wir setzen $\lambda = \|\tilde{f}\|_{L^p}^{-\frac{1}{q}} \|\tilde{g}\|_{L^q}^{\frac{1}{p}}$ und erhalten (da $\frac{p}{q} = p - 1$ und $\frac{q}{p} = q - 1$)

$$= (\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

$\square$

Satz 6.3 (Minkowskiungleichung)**.** *Sei* $1 \leq p \leq \infty$ *und seien* $\tilde{f}, \tilde{f} \in L^p$*. Dann gilt*

$$\|\tilde{f} + \tilde{g}\|_{L^p} \leq \|\tilde{f}\|_{L^p} + \|\tilde{g}\|_{L^p}$$

Insbesondere ist $L^p(\mu)$ *ein normierter Vektorraum mit dieser Norm.*

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall $p = 1$:

$$\|\tilde{f} + \tilde{g}\|_{L^1} = \int |f + g| d\mu \leq \int |f| + |g| d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu = \|\tilde{f}\|_{L^1} + \|\tilde{g}\|_{L^1}$$

Im Fall $p = \infty$ sei $f \in \tilde{f}$, $g \in \tilde{g}$ und N eine Nullmenge so dass

$$\|\tilde{f}\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X \backslash N} |f(x)| \qquad \|g\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X \backslash N} |g(x)|$$

Dann folgt für $x \in X \backslash N$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|\tilde{f}\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.$$

Sei jetzt $1 < p < \infty$. Aus

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

folgt dass $f+g$ p integrierbar ist, falls f und g p integrierbar sind. Wir wählen q mit $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$ und schreiben

$$\begin{aligned}\int|\tilde f+\tilde g|^p d\mu=&\int|f+g|^{p-2}\overline{(f+g)}(f+g)d\mu\\ =&\int|f+g|^{p-2}\overline{(f+g)}fd\mu+\int|f+g|^{p-2}\overline{(f+g)}gd\mu\\ \le&\int|f+g|^{p-1}|f|d\mu+\int|f+g|^{p-1}|g|d\mu\\ \le&\||\tilde f+\tilde g|^{p-1}\|_{L^q}\left(\|\tilde f\|_{L^p}+\|\tilde g\|_{L^p}\right)\\ =&\|\tilde f+\tilde g\|_{L^p}^{p-1}\left(\|\tilde f\|_{L^p}+\|\tilde g\|_{L^p}\right).\end{aligned}$$

Die erste Gleichheit ist offensichtlich, da die Integranden gleich sind. Die zweite ist die Linearität, für die wir die Integrierbarkeit beider Integranden benötigen. Die Integrierbarkeit folgt mit der letzten Ungleichung, die aus der Hölderungleichung folgt. Für die letzte Gleichung verwenden wir

$$\int|f+g|^{(p-1)q}d\mu=\int|f+g|^p d\mu.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Menge der x, für die $f(x)+g(x)=0$ ist, keine Probleme bereitet.

Ist $\|\tilde f+\tilde g\|_{L^p}=0$ so ist nicht zu zeigen. Andernfalls teilen wir beide Seiten durch $\|\tilde f+\tilde g\|_{L^p}^{p-1}$. □

Wir betrachten das folgende Beispiel: Sei $X=\{a,b\}$,

$$\mathcal{A}=\mathcal{P}(X)=\{\{\},\{a\},\{b\},\{a,b\}\},$$

$\mu(A)=\#A$ die Anzahl der Elemente. $f:X\to\bar{\mathbb{R}}$ ist durch die Werte $f(a)$ und $f(b)$ gegeben. Jede Funktion ist messbar, und integrierbar genau dann wenn $f:X\to\mathbb{R}$. Jede Äquivalenzrelation enthält genau eine Funktion. Es gilt

$$\|f\|_{L^p(\mu)}=(|f(a)|^p+|f(b)|^p)^{1/p}.$$

Der Vektorraum der p integrierbaren Funktionen hat die Dimension 2, und damit isomorph zu $\mathbb{R}^2$. Wir definieren den Isomorphismus

$$L^p(\mu)\ni f\to\begin{pmatrix}f(a)\\ f(b)\end{pmatrix}\ni\mathbb{R}^2.$$

Damit erhalten wir die p Norm auf $\mathbb{R}^2$,

$$\left|\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right|_p=(|x_1|^p+|x_2|^p)^{1/p}$$

mit den offensichtlichen Modifikationen für $p=\infty$. Es ist instruktiv, die Einheitsbälle dieser Normen zubetrachten.

Sei jetzt $X=\mathbb{N}$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu(A)=\#A$ die Anzahl der Elemente, d.h. μ ist das Zählmaß bzw $\mathcal{H}^0$. Die leere Menge ist die einzige Nullmenge. σ Additivität ist offensichtlich.

Wir identifizieren $L^p(\mu)$ mit den p summierbaren Folgen l^p,

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{l^p} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

falls $1 \le p < \infty$ und

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{l^\infty} = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Satz 6.4 (Fischer-Riesz). *Sei $1 \le p \le \infty$, f_n p integrierbar und $\tilde{f}_n$ sei eine Cauchyfolge. Dann konvergiert eine Teilfolge fast überall gegen eine p integrierbare Funktion f und*

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_{L^p} \to 0.$$

Insbesondere ist $L^p(\mu)$ ein Banachraum.

[08.01.2019]

[10.01.2018]

Beweis. Sei zunächst $p = \infty$, f_n so dass $\tilde{f}_n$ eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$. Für alle k existieren dann $M(k) > 0$ so dass für alle $n, m \ge M$

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\|_{L^\infty} < \frac{1}{k}$$

Also existiert eine Nullmenge $N_{n,m,k}$ so dass

$$|f_n - f_m| < \frac{1}{k}$$

außerhalb von $N_{n,m.k}$. Wir definieren

$$N = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n,m\ge M(k)} N_{n,m,k}.$$

Dann konvergiert f_n außerhalb der Nullmenge N gleichmässig. Für definieren f außerhalb von N als diesen Limes, und Null in N. Dann folgt

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_{L^\infty} \le \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\backslash N\} \to 0.$$

Sei jetzt $1 \le p < \infty$. Durch Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen:

$$\|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\|_{L^p} \le 2^{-n}$$

Sei

$$F = |f_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1} - f_n|$$

Dann ist mit dem Satz von Beppo Levi

$$\begin{aligned}\int |F|^p d\mu &= \int (|f_1| + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |f_{n+1} - f_n|)^p d\mu \\ &= \lim_{N\to\infty} \int (|f_1| + \sum_{n=1}^{N} |f_{n+1} - f_n|)^p d\mu\end{aligned}$$

und mit dem Satz von Minkowski

$$\||\tilde{f}_1| + \sum_{n=1}^{N} |\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n|\|_{L^p} \leq \|\tilde{f}_1\|_{L^p} + \sum_{n=1}^{N} \|\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n\|_{L^p} \leq \|\tilde{f}_1\|_{L^p} + 2.$$

Daher ist F p integrierbar. Die Folge

$$|f_1| + \sum_{n=1}^{N} |f_{n+1} - f_n|$$

ist für fast alle x beschränkt und monoton, also konvergent. Daher konvergiert auch

$$f_N = f_1 + \sum_{n=1}^{N} (f_{n+1} - f_n)$$

mit dem Majorantenkriterium fast überall. Sei f der Limes, falls dieser existiert, und 0 sonst. Dann konvergiert f_n fast überall gegen f. f ist messbar als Limes messbarer Funktionen (außerhalb der Nullmenge).

Da $|f| \leq F$ fast überall und F p integrierbar ist, ist auch f p-integierbar.

Die Folge $|f - f_n|^p$ konvergiert fast überall gegen Null. Da

$$|f - f_n|^p \leq F^p$$

ist die rechte Funktion eine Majorante und

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_{L^p}^p \to 0 \qquad \text{mit } n \to \infty.$$

Also ist $\tilde{f}$ Limes der Teilfolge. Hat in einem metrischen Raum eine Teilfolge einer Cauchyfolge einen Limes, so ist das auch der Limes der Folge.

□

6.2. **Der Fall $p = 2$.**

Lemma 6.5 (Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** *Seien $f, g \in L^2$ komplexwertige quadratintegriebare Funktionen. Dann ist $f\overline{g}$ integrierbar und*

$$\left| \int f\overline{g} d\mu \right| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

Das ist ein Spezialfall der Hölderungleichung mit $p = q = 2$.

Definition 6.2. *Wir definieren für $f, g \in L^2$ das Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle = \int f\overline{g} d\mu$$

Offensichtlich gilt

1. $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$ für $f, g \in L^2$.
2. $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.
3. $0 \leq \langle f, f \rangle = \|f\|_{L^2}^2$ für alle $f \in L^2$.
4. Für alle $g \in L^2$ ist $f \to \langle f, g \rangle$ linear.

Damit ist L^2 mit diesem Skalarproduckt ein euklidscher Vektorraum.

Definition 6.3. *Ein Hilbertraum ist ein vollständiger euklidscher Vektorraum.*

Insbesondere sind $L^2(\mu)$ und l^2 Hilberträume.

Wir erinnern an die Besselsche (Un-)gleichung aus Kapitel 1: Sei H ein (komplexer) Hilbertraum und $(e_j)_{j\in J}$ orthonormale Vektoren, $J = \{j \in \mathbb{N} : j \leq N\}$ mit $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, d.h.

$$\langle e_j, e_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $j, k \leq N$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \tag{6.1}$$

falls $N < \infty$

$$\|x\|^2 = \|\sum_{n=0}^{N}\langle x, e_j\rangle e_j\|^2 + \|x - \sum_{n=0}^{N}\langle x, e_j\rangle e_j\|^2$$

und

$$\|\sum_{n=0}^{N}\langle x, e_j\rangle e_j\|^2 = \sum_{j=0}^{N} |\langle x, e_j\rangle|^2.$$

Falls in (6.1) Gleichheit vorliegt, so konvergiert die Reihe und

$$x = \sum_{j=0}^{N}\langle x, e_j\rangle e_j.$$

6.2.1. *Fourierreihen.* Sei $X = [0, 2\pi)$, $\mathcal{A}$ die σ Algebra der Lebesguemengen und $\mu = \frac{1}{2\pi}m^1$ das eindimensionale Lebesguemass.

Definition 6.4. *Für $\tilde{f} \in L^2$ mit komplexen Werten und $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir*

$$a_n(\tilde{f}) = \int f e^{-inx} d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f e^{-inx} dx = \langle f, e^{inx}\rangle$$

Die Funktionen $e_n = e^{inx}$ sind orthonormal.

Satz 6.6. *Es gilt immer für $f \in L^2$*

$$\tilde{f} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n \widetilde{e^{inx}}$$

in L^2.

Da $e^{inx} \in L^2$ sind die Fourierkoeffizienten a_n wohldefiniert. Da für

$$f_N = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$$

$$\langle \tilde{f} - \tilde{f}_N, \tilde{f}_N\rangle = 0$$

gilt

$$\|\tilde{f}\|_{L^2}^2 = \|f_N\|_{L^2}^2 + \|\tilde{f} - \tilde{f}_N\|_{L^2}^2$$

und

$$\|\tilde{f}_N\|_{L^2}^2 = \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2.$$

Ist f stetig, so gilt nach Lemma 1.1

$$\lim_{N\to\infty} \|\tilde{f}_N - \tilde{f}\|_{L^2}^2 = 0$$

und $f_N \to f$ in L^2.

Der Einheitskreis ist kompakt. Wir identifizieren $[0, 2\pi)$ mit dem Einheitskreis auf die offensichtliche Art und Weise. Dann definiert μ ein endliches Borelmass. Offensichtlich sind einfache Funktionen dicht in $L^2(\mu)$ (wie in L^1, siehe auch nächste Vorlesung) und daher sind stetige periodische Funktionen dicht in $L^2(\mu)$ (wieder wie in L^1) . Sei also $f \in L^2$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine stetige periodische Funktion g mit $\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon/3$ und N so dass

$$\|g - g_N\|_{L^2} < \varepsilon/3.$$

Dann ist aber auch

$$\|f_N - g_N\|_{L^2} = \|(f - g)_N\|_{L^2} \le \|f - g\|_{L^2} < \varepsilon/3.$$

Insgesamt folgt

$$\|f - f_N\|_{L^2} \le \|f - g\|_{L^2} + \|g - g_N\|_{L^2} + \|g_N - f_N\|_{L^2} < \varepsilon$$

6.2.2. *Der Projektionssatz.*

Lemma 6.7. *Sei H ein Hilbertraum und $x, y \in H$. Dann gilt*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Sei H ein Hilbertraum mit innerem Produkt $\langle ., . \rangle$.

Definition 6.5. *Wir nennen $K \subset H$ komvex wenn mit $x, y \in K$ und $0 \le \lambda \le 1$ auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.*

Satz 6.8. *Sei $K \subset H$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Für $x \in H$ existiert genau ein $y \in K$ so dass*

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, K).$$

(1) *Für alle $z \in K$ gilt*

$$\operatorname{Re}\langle z - h, x - h\rangle \le 0. \tag{6.2}$$

(2) *ISt $x \in H$ und $y \in K$, und gilt (6.2) für alle $z \in K$, so ist y der Punkt, der den Abstand realisiert.*

(3) *Wir nennen die Abbildung $x \to y = P(x)$ die Projektion auf K. P ist Lipschitz stetig mit Konstante 1.*

(4) *Ist K ein abgeschlossener Untervektorraum, so ist p linear und $\langle z - p(x), x - p(x)\rangle = 0$ für alle $z \in K$.*

Beweis. Sei $y_n \in K$ eine Folge mit

$$\|x - y_n\| \to \operatorname{dist}(x, K).$$

Dann ist

$$\|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 + \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2$$

und daher (mit $\|y_n + x + y_m + x\| = 2\|(y_n - y_m)/2 - x\| \geq 2\,\mathrm{dist}(x,K)^2$ da $(y_n + y_m)/2 \in K$)

$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\,\mathrm{dist}(x,K)^2 \to 0$ mit $n, m \to \infty$.

Also ist (y_n) eine Cauchyfolge. Da H als Hilbertraum vollständig ist, konvergiert die Cauchyfolge. Der Limes realisiert den Abstand. Das Argument impliziert auch die Eindeutigkeit des Limes, und damit der Projektion. Sei jetzt $z \in K$. Dann ist für $0 \leq t \leq 1$ auch $y + t(z-y) \in K$ und

$\|x - y\|\|^2 \leq \|x-(y+t(z-y))\|^2 = \|x-y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle + t^2\|z-y\|^2$

Damit folgt die Ungleichung.

Sei nun $x \in H$, $y \in K$ und es gelte (6.2) für ein z. Dann ist

$\|x-z\|^2 = \|x-y-(z-y)\|^2 = \|x-y\|^2+\|z-y\|^2-2\,\mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \geq \|x-y\|^2$

und y ist die Projektion falls (6.2) für alle $z \in K$ gilt.

Sei $x_1, x_2 \in X$, $y_j = p(x_j)$. Dann folgt

$$\mathrm{Re}\langle x_1 - p(x_1), p(x_2) - p(x_1)\rangle \leq 0 \leq \mathrm{Re}\langle x_2 - p(x_2), p(x_2) - p(x_1)\rangle$$

und daher

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathrm{Re}\langle x_2 - p(x_2) - (x_1 - p(x_1)), p(x_2) - p(x_1)\rangle \\ &= \mathrm{Re}\langle x_2 - x_1, p(x_2) - p(x_1)\rangle - \|p(x_2) - p(x_1)\|^2 \end{aligned}$$

und

$$\|p(x_2) - p(x_1)\|^2 \leq \mathrm{Re}\langle x_2 - x_1, p(x_2) - p(x_1)\rangle \leq \|x_2 - x_1\|\|p(x_2) - p(x_1)\|$$

woraus

$$\|p(x_2) - p(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$$

folgt. Man verifiziert leicht, dass die Lipschitzkonstante nicht kleiner sein kann.

Sei nun K ein abgeschlossener Untervektorraum und p die Projektion. Sei jetzt $x_1, x_2 \in H$. Dann ist für $w \in K$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\langle x_1 + x_2 - p(x_1) - p(x_2), w - (p(x_1) + p(x_2))\rangle \\ &\quad = \mathrm{Re}\langle x_1 - p(x_1), (w - p(x_2)) - p(x_1)\rangle + \mathrm{Re}\langle x_2 - p(x_2), (w - p(x_1)) - p(x_2)\rangle \\ &\quad \leq 0 \end{aligned}$$

und damit ist $p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2)$. Genauso sieht man $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. Da für $w \in K$

$$\mathrm{Re}\langle x - p(x), w - p(x)\rangle \leq 0$$

und

$$\mathrm{Re}\langle x - p(x), p(x) - w(x)\rangle = \mathrm{Re}\langle x - p(x), (2p(x) - w(x)) - p(x)\rangle \leq 0$$

folgt

$$\mathrm{Re}\langle x - p(x), w - p(x)\rangle = 0$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle x - p(x), i(w - p(x))\rangle &= -\mathrm{Re}\, i\langle x - p(x), w - p(x)\rangle \\ &= \mathrm{Im}\langle x - p(x), w - p(x)\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

[10.01.2018]

[15.01.2019]

6.3. **Der Satz von Riesz.** Sei $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L^q$. Die Abbildung

$$L^p \ni g \to T_f(g) := \int g\overline{f} d\mu \in \mathbb{C}$$

ist offensichtlich linear und es gilt

$$\|T\|_{L(L^p \to \mathbb{C})} \leq \|f\|_{L^q}.$$

Ist $1 \leq p < \infty$, so können wir

$$g = |f|^{q-2} f$$

einsetzen und erhalten

$$|T_f(f)| = \|f\|_{L^q}^q$$

und

$$\||f|^{q-2} f\|_{L^p} = \|f\|_{L^q}^{q-1},$$

da $p(q-1) = q$, also $\|T_f\|_{L^p \to \mathbb{C}} \geq \|f\|_{L^q}$. Wir erhalten

Satz 6.9. *Die Abbildung $f \to T_{\bar{f}} \in L(L^p; \mathbb{C})$ ist linear, und bildet L^q isometrisch auf einen Teilraum von $L(L^p; \mathbb{C})$ ab.*

Satz 6.10. *Sei H eine Hilbertraum und $T : H \to \mathbb{C}$ eine stetige lineare Abbildung. Dann existiert genau ein $z \in H$ so dass*

$$T(x) = \langle x, z \rangle$$

für alle $x \in H$.

Beweis. Sei T wie im Satz. Ist $T = 0$, so ist $z = 0$. Sei jetzt $\tilde{y} \in H$ mit $T(\tilde{y}) \neq 0$ und $K = \{x : T(x) = 0\}$. K ist ein abgeschlossener Untervektorraum (da T stetig) und damit konvex. Wir definieren

$$y = \frac{1}{\|\tilde{y} - p(\tilde{y})\|} (\tilde{y} - p(\tilde{y})).$$

Da $\operatorname{dist}(y, K) > 0$ ist $\tilde{y} \neq p(\tilde{y})$. Außerdem ist $p(y) = 0$.
Behauptung: Wir können $x \in H$ genau auf eine Weise als

$$x = \lambda y + w, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, w \in K$$

schreiben. Sei $x \in H$. Dann ist

$$L(x - \frac{L(x)}{L(y)} y) = 0$$

und damit

$$x = \lambda y + w$$

mit

$$\lambda = \frac{L(x)}{L(y)}, \qquad w = x - \frac{L(x)}{L(y)} y.$$

Wir definieren

$$z := \overline{L(y)} y.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} L(x) &= L(\lambda y + w) \\ &= \lambda L(y) \\ &= \lambda \langle y, z\rangle \\ &= \langle \lambda y + w, z\rangle \\ &= \langle x, z\rangle. \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit: Aus $\langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$ für alle $x \in H$ folgt $\langle x, y_2 - y_1\rangle = 0$ für alle x, und mit $x = y_2 - y_1$ folgt $y_2 = y_1$. □

6.4. **Die Jensensche Ungleichung.**

Definition 6.6. *Es sei I ein Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in I$ und $0 \le t \le 1$*

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$

Beispiele

(1) $I = \mathbb{R}$, $x \to |x|^\alpha$ für $\alpha \ge 1$
(2) $I = [0,1]$, $f(x) = 1$ für $x = 0, 1$ und $f(x) = 0$ für $x \in (0,1)$
(3) $x \to \exp(x)$

Es folgt für $x_0 < x_1 < x_2$, $x_j \in I$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \le \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

und damit sind die Differenzenquotienten für x_0 im Inneren (und x_1 in einer kompakten Menge ohne x_0) nach oben und unten beschränkt. Die Abbildung

$$x_1 \to \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Damit existiert die rechtsseitige Abbildung $\partial^+ f(x_0)$, und genauso die linksseitige Ableitung $\partial^- f(x_0)$ (im Inneren) und

$$\partial^- f(x_0) \le \partial^+ f(x_0)$$

Lemma 6.11. *Sei x_0 im Inneren von I, und $\partial^- f(x_0) \le a \le \partial^+ f(x_0)$.Dann ist*

$$f(x) \ge f(x_0) + a(x - x_0)$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage für $a = \partial^+ f(x_0)$. Das Argument für $\partial^- f(x_0)$ ist genauso, und damit folgt die Aussage. Für alle $x_1 > x_0$ ist

$$f(x) \ge f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

für $x \le x_0$ und für $x \ge x_1$. Damit folgt die Aussage für $x_1 \to x_0$. □

Satz 6.12. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) = 1$. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei konvex. Dann ist für $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar* $\max\{-F \circ f, 0\}$ *integrierbar und es gilt*

$$F\Big(\int f d\mu\Big) \le \int F \circ f d\mu$$

Beweis. $t_0 = \int f d\mu$ und $c \in \mathbb{R}$ so dass

$$F(t) \geq F(t_0) + c(t - t_0).$$

Dann ist

$$\int F \circ f d\mu \geq \int F(t_0) + c(f - t_0) d\mu = F(t_0) + c(\int f d\mu - t_0) = F(t_0).$$

Die Integrierbarkeit des negativen Anteils folgt aus diesen Ungleichungen. □

[15.01.2019]

[17.01.2019]

6.5. **Die Faltung und die Lebesgueräume $L^p(\mathbb{R}^d)$.** In diesem Abschnitt ist $X = \mathbb{R}^d$ oder X eine offenen Teilmenge und $\mu = m^d$

Definition 6.7 (Testfunktionen)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen. $f : U \to \mathbb{C}$ heißt Testfunktion, wenn f beliebig oft differenzierbar ist und*

$$\operatorname{supp} f \subset U$$

kompakt ist. Die Testfunktionen bilden eine Algebra (Summen und Produkte von Testfunktionen sind Testfunktionen. Wir bezeichnen den Raum der Testfunktionen mit $C_0^\infty(U)$. Wir sagen $f_n \to f$ in $C_0^\infty(U)$, falls eine kompakte Menge $K \subset U$ existiert mit $\operatorname{supp} f_n \subset K$ *und*

$$\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f$$

gleichmässig für alle Multiindices α.

Satz 6.13. *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(U)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Testfunktion mit*

$$\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$$

Beweis. Wir zeigen zuerst: Es existiert eine einfache Funktion h mit

$$\|f - g\|_{L^p(U)} < \varepsilon/2.$$

Es genügt, nichtnegative Funktionen f zu betrachten. Dann existiert eine Folge einfacher Funktionen h_n, die monoton gegen f konvergieren (siehe). Dann ist f^p Majorante für $|f - h_n|^p$, $|f - h_n|^p \to 0$ fast überall, also

$$\|f - h_n\|_{L^p}^p = \int |f - h_n|^p dm \to 0.$$

Sei A messbar und $\tilde{\varepsilon} > 0$. Dann existieren eine kompakte Menge K und eine offene Menge V mit

$$K \subset A \subset V \subset U$$

und $m^d(V \backslash K) < \tilde{\varepsilon}$. Nach Lemma 5.19 (mit einer einzigen offenen Menge) existiert eine Testfunktion, die 1 auf K ist und den Träger in V hat. □

Lemma 6.14 (Youngsche Ungleichung 1)**.** *Sei $1 \leq p, q, r \leq \infty$,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$$

f, g und H seien p, q, resp. r integrierbar. Dann ist

$$(x, y) \to f(x - y) g(y) h(x)$$

m^{2d} integrierbar und

$$\left| \int f(x-y)g(y)h(x)dm^{2d}(x,y) \right| \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \|h\|_{L^r}. \tag{6.3}$$

Beweis. Die Messbarkeit ist offensichtlich, und wir können zu Beträgen übergehen. Ist ein Exponent $r = 1$ so ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und

$$|\int f(x-y)g(y)dm^d(y)| \le \|f(x-.)\|_{L^p} \|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Wir argumentieren genauso wenn $p = 1$ ist. Ist $q = 1$ so machen einen Koordinatenwechsel $(x,y) \to (z,y)$, $z = y - x$. Wir halten

$$\int f(z)g(y-z)h(y)dm^2(y,z).$$

Ist einer der Exponenten ∞, so sind die anderen 1, und wir betrachten nur noch $1 < p, q, r < \infty$.

Wir nehmen an, f, g, h sind nichtnegativ und wir definieren $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$ etc und

$$F = g^{q/p'} h^{r/p'}, G = f^{p/q'} h^{r/q'} H = f^{p/r'} g^{q/r'}.$$

Dann ist

$$f(x-y)g(y)h(x) = FGH$$

da

$$\frac{p}{q'} + \frac{p}{r'} = p(\frac{1}{q'} + \frac{1}{r'}) = p(1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}) = 1$$

etc und

$$\begin{aligned} \int fgh dm^{2d} &= \int FGH dm^{2d} \\ &\le \|F\|_{L^{p'}} \|GH\|_{L^p} \\ &\le \|F\|_{L^{p'}} \left(\int G^p H^p dm^{2d} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \|F\|_{L^{p'}} \|G^p\|_{L^{q/p}}^{1/p} \|H^p\|_{L^{r/p}}^{1/p} \\ &= \|F\|_{L^{p'}} \|G\|_{L^{q'}} \|H\|_{L^{r'}} \end{aligned}$$

Es gilt mit Fubini

$$\|F\|_{L^{p'}} = \left(\int g^q(y) h^r(x) dm^{2d} \right)^{\frac{1}{p}'} = \|g\|_{L^q}^{\frac{q}{p}'} \|h\|_{L^r}^{\frac{r}{p'}}$$

und genauso

$$\|G\|_{L^{q'}} = \left(\int f^p(y) h^r(x) dm^{2d} \right)^{\frac{1}{q}'} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{q}'} \|h\|_{L^q}^{\frac{q}{q'}}$$

$$\|H\|_{L^{r'}} = \left(\int f^p(y) g^q(x) dm^{2d} \right)^{\frac{1}{r}'} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{r}'} \|h\|_{L^q}^{\frac{q}{r'}}$$

und

$$p(\frac{1}{r'} + \frac{1}{q'}) = p(1 - \frac{1}{r} + 1 - \frac{1}{q}) = p\frac{1}{p} = 1$$

und es folgt (6.3). □

Satz 6.15 (Youngsche Ungleichung)**.** *Sei $1 \le p, q \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$, f Lebesgue p integrierbar und g Lebesgue q integrierbar. Dann ist für fast alle x*

$$y \to f(x-y)g(y)$$

Lebesgueintegrierbar und

$$x \to \int f(x-y)g(y)dm^d(y) =: f * g(x)$$

definiert eine Element in L^r mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

und

$$\|f * g\|_{L^r} \le \|\tilde{f}\|_{L^p} \|\tilde{g}\|_{L^q}.$$

Beweis. Wir zeigen die Youngsche Ungleichung für nichtnegative Funktionen. Daraus folgt die Aussage für allgemeine Funktionen. Dann ist

$$h(x) := \int f(x-y)g(y)dm^d(y)$$

für fast alle x definiert - und möglicherweise ∞. Wir definieren $H(x) = |h|^{r-2}h$. Dann ist

$$\|h\|_{L^r}^r = \|H\|_{L^{r'}}^{r'} = \int f(x-y)g(y)H(x)dm^{2d} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\|H\|_{L^{r'}}$$

und die Aussage folgt falls $h \in L^r$. Wir ersetzen h durch

$$H_R = \chi_{B_R} \min\{H, R\}.$$

Wir erhalten

$$\|H_R\|_{L^{r'}}^{r'} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\|H_R\|_{L^{r'}}$$

und damit

$$\|h\|_{L^r} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

□

Satz 6.16. *Es sei $j \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\int j dm^d = 1$. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ definieren wir*

$$f_\varepsilon = f * j_\varepsilon$$

wobei

$$j_\varepsilon = \varepsilon^{-d} f(x/\varepsilon).$$

Dann gilt

(1) $\|f_\varepsilon\|_{L^p} \le \|j\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$
(2) $f_\varepsilon \to f$ *mit* $\varepsilon \to 0$ *in* L^p *falls* $p < \infty$.

Beweis. Die erste Aussage ist ein Spezialfall der Youngschen Ungleichung. Die zweite Aussage ist klar für beschränkte stetige Funktionen. Sei $\varepsilon > 0$, f_n stetig mit kompaktem Träger und $\|f - f_n\|_{L^p} < 1/n$. Da

$$f_{n,\varepsilon} \to f_n$$

mit $\varepsilon \to 0$ für alle x folgt

$$\int_{B_R(0)} |f_{n,\varepsilon} - f_n|^p dx \to 0$$

mit $n \to \infty$.

$\square$

Satz 6.17. *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dann hat das Komplement der Menge der Lebesguepunkte das Maß Null und*

$$(m^d(B_r(x)))^{-1} \int_{B_r(x)} f dm^d \to f(x)$$

für überall.

Satz 6.18. *Sei $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger. Dann ist $f * g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ und*

$$\partial_{x_j} f * g = f * (\partial_{x_j} g)$$