Analysis 3

13.11.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 20.11.2018 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: **4 + 6 = 10 Punkte**

(a) Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{B(0,\pi)}(x) \sin(|x|) \, \mathrm{d}m^d.$$

(b) Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann f auch (Lebesgue-)integrierbar ist und gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) f(x) \, \mathrm{d}m = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x,$$

wobei das Integral auf der linken Seite im Lebesguesche Sinne und das auf der rechten Seite im Riemannschen Sinne zu verstehen ist.

Aufgabe 2: Konvergenzsätze **4 + 3 + 3 = 10 Punkte**

Bestimmen Sie

(a) mittels des Satzes über dominierte/majorisierte Konvergenz den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) e^{-x} \big(\sin(x)\big)^n \, \mathrm{d}m,$$

(b) mittels des Satzes über dominierte/majorisierte Konvergenz den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) \frac{1}{1+x^n} \, \mathrm{d}m,$$

(c) mittels des Satzes über monotone Konvergenz von Beppo Levi den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) \mathrm{d}m,$$

wobei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine beliebige messbare Funktion mit $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}m < \infty$ ist.

Begründen Sie dabei genau die Anwendbarkeit der aus der Vorlesung zitierten Sätze.

Aufgabe 3: Konvergenzsätze: Beispiele & Gegenbeispiele **4 + 3 + 3 = 10 Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $f_n(x) := nxe^{-nx^2}$ auf $[0,1]$ keine integrierbare Majorante besitzt, und dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) f_n(x) \, \mathrm{d}m \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} (\mathbf{1}_{[0,1]}(x) f_n(x)) \, \mathrm{d}m$$

gilt, wobei der rechtsseitige Limes punktweise zu verstehen ist.

(b) Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, f_1, f_2 \ldots \colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen, für die eine messbare Funktion $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\int_X |g| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ und $f_n \geq -g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(c) Zeigen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels), dass die Aussage von (b) im Allgemeinen nicht wahr bleibt, wenn wir auf die Existenz einer wie dort angegebenen integrierbaren Funktion $g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $f_n \geq -g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ verzichten.

Aufgabe 4: **7 + 3 = 10 Punkte**

Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ messbar (bzgl. m^d) und $T \subset \mathbb{R}^n$ messbar (bzgl. m^n). Sei weiters $f\colon X \times T \to \mathbb{R}$ so, dass das Folgende gilt:

(i) Für jedes $x \in X$ ist die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ auf T messbar und $\int_T f(x,t) \,\mathrm{d}m^n(t) < \infty$.

(ii) Für jedes $t \in T$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ stetig.

(iii) Es gibt eine messbare Funktion $\varPhi\colon T \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int_T \varPhi(t) \,\mathrm{d}m^n(t) < \infty$ und $|f(x,t)| \leq \varPhi(t)$ für alle $(x,t) \in X \times T$.

(a) Zeigen Sie, dass die durch

$$F\colon \Omega \ni x \mapsto F(x) := \int_T f(x,t) \,\mathrm{d}m^n(t)$$

definierte Funktion wohldefiniert und stetig ist.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrierbar (bzgl. m^d) und setze für $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} \,\mathrm{d}m^d(x).$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}f$ wohldefiniert und stetig ist.

Hierbei ist jeweils m^n bzw. m^d das n- bzw. d-dimensionale Lebesguemaß.

Bemerkung: Hierbei nennen wir eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ (Lebesgue-)integrierbar, falls sowohl Real- als auch Imaginärteil als Funktionen $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (Lebesgue-)integrierbar sind. Wir definieren dann für solches integrierbares $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \,\mathrm{d}m^d := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Re}(g) \,\mathrm{d}m^d + \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Im}(g) \,\mathrm{d}m^d.$$