Kleine AG
Geradenkomplexe und Kummers Quartik

am 18.04.2009 in Bonn

Organisatoren:
Heinrich Hartmann (hartmann@math.uni-bonn.de),
Christian Lehn (clehn@mathematik.uni-mainz.de)

1. Einleitung

In dieser Kleinen AG wollen wir uns mit Algebraischer Geometrie im engeren Sinne beschäftigen.
Es geht um den Modulraum von Geraden im $\mathbb{P}^3$. Nach Plücker kann man diesen als eine Quadrik in den $\mathbb{P}^5$ einbetten. Ein Geradenkomplex ist nun eine Familie von Geraden die durch eine Hyperfläche im $\mathbb{P}^5$ ausgeschnitten wird.
Trotz dieser "langweiligen" Definition (ohne Stacks, Motive, Derivierte Kategorien) bringen diese Objekte eine sehr reiche Geometrie mit sich, die nicht nur überraschend sondern auch aus moderner Sicht interessant ist. Das Studium dieser Geradenkomplexe erfordert nämlich eine weiteres Spektrum an fortgeschritten Techniken (Hodge Theorie, Kurven, Abelsche Varietäten, K3 Flächen, Chern Klassen, Schubert Zellen) deren Schlagkraft hier eindrucksvoll zum Vorschein kommt.
Wir sehen das als eine gute Gelegenheit, diese abstrakten Methoden mit etwas mehr Anschauung zu füllen.
In der Tat sind wir nicht die einzigen, die dieses Thema interessant finden, der Theorie der Geradenkomplexe ist z.B. ein ganzes Kapitel in dem Buch von Griffiths und Harris [1] gewidmet, welches uns als Grundlage für das Programm dient. Die klassische Referenz sind die Vorlesungen von Felix Klein [2].
Als weitere Motivation/Ausblick sei bemerkt, dass "vor kurzem" Narasimhan und Ramanan [3] entdeckt haben, dass der Modulraum von Vektorbündlen mit $\mathrm{rk} = 2, \deg = 1$ und fixierter Determinante über eine Kurve vom Geschlecht 2 isomorph zu einem Geradenkomplex ist.

2. Das Programm

1. Vortrag (60 Min.): Schubertkalkül und Quadriken. (S.194-202 in [1] und S.734-739, 746-749 in [1])
Dieser Vortrag hat zweierlei Ziele. Wir beginnen mit der Schnitttheorie der Graßmannschen $\mathrm{Grass}(k, n)$. Da wir davon ausgehen, dass die Grassmannsche an sich bekannt ist, beginnen wir mit der Definition der Schubertzykel und zugehöriger Proposition (ohne Beweis)(S. 196 in [1]), die exemplarische Erwähnung der Gegebenheiten in $\mathrm{Grass}(2, 4)$ auf S. 197 oben ist sicher hilfreich.
Nun ist die additive Struktur der Kohomologie geklärt und wir wollen die multiplikative Struktur verstehen. Dazu müssen wir das Schnittprodukt zweier bzw. dreier Zykel in komplementärer Dimension verstehen (S. 198). Der nächste wichtige Schritt ist, dass nun ein Schubertzykel σ_a mit $a = (a_1, .., a_k)$ und $a_i \leq n-k$ als Zykel in jeder beliebigen Grassmannschen (nicht nur in $\mathrm{Grass}(k, n)$) interpretiert wird. Damit sind die 1. und 2. genannten Sachverhalte auf (S. 200) sowie die Reduktionsformeln I und II auf S. 202 zugänglich. Dies sind die wesentlichen Rechenregeln für Schubertzykel, die nun an Beispielen ein geübt werden sollen (S. 202 unten und dergleichen).

Das zweite Ziel sind Quadriken. Die Beschreibung glatter Quadriken, des singulären Ortes einer Quadrik und der Quadrik als Kegel über ihrem singulären Ort (S. 734) sollen erklärt werden. Danach den Zykel $\Sigma_{k,n}$ der k-dimensionalen linearen Unterräume auf einer Quadrik in $\mathbb{P}^{n+1}$ definieren (S. 739 oben) und in Schubertzykeln ausdrücken.
Die Aussagen über Schnitttheorie auf der Grassmannschen sollten verständlich gemacht, nicht notwendig bewiesen werden. Wichtig ist, dass wir nach diesem Vortrag Rechnungen mit Schubertzellen durchführen können. Für die Rechnungen sollte man sich viel Zeit nehmen und kleine Schritte machen. Im Teil über Quadriken sollte nach Möglichkeit alles bewiesen werden.

2. Vortrag (30 Min.):Lineare Geradenkomplexe. (S.756-761 in [1])
Die Geometrie von $\mathrm{Grass}(2,4)$ soll beschrieben werden. Kurz die Plückereinbettung wiederholen und dann die explizite Beschreibung der Schubertzykel vorführen (S. 756-757). Den *Fokus* und die *Ebene* eines Büschels für späteren Gebrauch definieren. Nun kommen wir zu Geradenkomplexen. Nach der allgemeinen Definition soll die gesamte Theorie der linearen Geradenkomplexe, d.h. $X = \mathrm{Grass}(2,4) \cap H \subset \mathbb{P}^5$, mit H Hyperebene, diskutiert werden (S.759-761). Besonderen Wert auf die Möbiuskonfiguration legen.

3. Vortrag (45 Min.):Quadratische Geradenkomplexe. (S.762-773 in [1])
Ein quadratischer Geradenkomplex wird durch eine quadratische Gleichung Q aus der Grassmanschen ausgeschnitten: $X = \mathrm{Grass}(2,4) \cap Q \subset \mathbb{P}^5$.
Wir beweisen das Lemma (S. 762, einer der beiden Beweise) über unseren quadratischen Geradenkomplex X und diskutieren die drei Möglichkeiten für $X_p = X \cap \sigma(p)$, d.h. alle Geraden aus X die den Punkt $p \in \mathbb{P}^3$ enthalten.
Die Punkte p an denen X_p degeneriert bilden die Kummerfläche $S \subset \mathbb{P}^3$. Wir definieren außerdem die Menge $R \subseteq S$ und berechnen $\deg S = 4$.
Man sollte die zweite Rechnung für $\deg S$ präsentieren, da man hiermit auch noch zeigen kann, dass $S \backslash R$ glatt ist. Die analogen Aussagen für S^* sind nicht so wichtig und können nebst Dualitätsaussage auf S.767 oben nur erwähnt werden.
Nun definieren wir "singuläre Geraden" (S. 767) und die Menge $\Sigma \subseteq X$ aller Geraden mit dieser Eigenschaft und stellen $\pi : \Sigma \to S$ vor. Dabei ist das Resultat auf S.770 wichtig:
Σ ist eine K3 Fläche die $S \subset \mathbb{P}^3$ minimal desingularisiert und die Punkte in $R \subset S$ sind gewöhnliche Doppelpunkte.
Die Bestimmung von $\#R = 16$ sollte vorgeführt werden, wobei es ratsam ist, die zweite Berechnung zu nehmen, da sie den Schubertkalkül und den bereits bestimmten Zykel $\Sigma_{k,n}$ benutzt. Wenn noch Zeit bleibt, kann auf die Berechnung der Eulercharakteristik von S eingegangen werden.

4. Vortrag (45 Min.):Geraden auf dem Geradenkomplex. (S.778-782 in [1])
Wir betrachten die Varietät A von Geraden auf dem Geradenkomplex X

$$A = \{ L \in \mathrm{Grass}(2,6) \,|\, L \subset X \}.$$

Elemente in A sind also Geradenbüschel in $\mathbb{P}^3$. Wir haben gesehen, dass diese Büschel genau die Schubertzellen $\sigma(p, H)$ auf der Grassmanschen Grass$(2, 4)$ sind. Wir erhalten eine Abbildung

$$A \longrightarrow S \subset \mathbb{P}^3, \quad L \mapsto p$$

die jedes Büschel auf seinen Brennpunkt abbildet.
Man zeigt, mit Hilfe eines Schnitttheorie Arguments, dass A glatt ist und berechnet die topologische Eulercharakteristik und den kanonischen Divisor um zu schließen: A ist eine Abelsche Varietät.
Diese Abelsche Varietät lässt sich noch genauer beschreiben. Dazu betrachten wir zu $L \in A$ die Kurve $B_L \subset A$ definiert durch

$$B_L = \{L' \in A \,|\, L \cap L' \neq \emptyset \subset X\}.$$

Es wird nun gezeigt, dass B_L glatt ist vom Geschlecht 2. Danach folgt relativ leicht, dass A und B_L isomorphe Hodgestrukturen haben. Mit anderen Worten: A ist die Jacobivarietät von B_L.
Es sollten die Beweise möglichst vollständig präsentiert werden. (Die Kurven D_V, die im Text definiert werden, brauchen wir später noch)

5. Vortrag (45 Min.):Die Gruppenstruktur. (S.787-791 in [1])
Für elliptische Kurven in der Ebene gibt es eine geometrische Konstruktion der Gruppenstruktur. Für die Abelsche Varietät A lässt sich etwas ähnliches machen.
Dazu konstruieren wir zunächst eine Darstellung von B_L als $2:1$ Überlagerung von $\mathbb{P}^1$. Die Verzweigungspunkte dieser Abbildung und lassen sich sogar aus der Gleichung für X und L ablesen.
Als nächstes zeigt man, dass die Summe in A von vier Geraden auf X die durch den Schnitt mit einer Hyperebene V in $\mathbb{P}^5$ gegeben sind $X \cdot V = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ unabhängig von V ist (das Argument von S.784, war noch nicht da und soll an dieser Stelle ausgeführt werden).
Wir wählen den so definierten Punkt L_0 in A als Null.
Um nun die Summe zweier Punkte L_1, L_2 in A, d.h. Geraden auf X zu bestimmen zerlegt man $L_1 = M_1 + M_2$ mit $M_1, M_2 \in B_{L_0} \subset A$. Die Translationen von L_2 mit M_i kann nun geometrisch aus der neuen Beschreibung von B_{L_0} konstruiert werden.

References

[1] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

[2] Felix Klein. *Vorlesungen über höhere Geometrie.* Dritte Auflage. Bearbeitet und herausgegeben von W. Blaschke. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 22. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[3] M. S. Narasimhan and S. Ramanan. Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface. *Ann. of Math. (2)*, 89:14–51, 1969.