Prof. Dr. Michael Rapoport
Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Seminar zur Vorlesung über Periodenbereiche

Blatt 4, Vorträge am 11.05.2006

Aufgabe 8

Sei L/k eine Körpererweiterung, und seien K, k' Erweiterungskörper von k, die in L enthalten sind. Es bezeichne $K' := Kk'$ das Kompositum von K und k' in L.

Wir setzen voraus, dass die Erweiterung k'/k endlich und separabel ist, und dass die Erweiterungskörper K und k' von k linear disjunkt sind, d. h. die natürliche Abbildung $K \otimes_k k' \longrightarrow K'$ ist ein Isomorphismus, oder äquivalent: $K \otimes_k k'$ ist ein Körper.

Ist $(V, \mathscr{F}) \in \mathrm{Fil}_k^K$, so ist $V \otimes_k k'$ ein k'-Vektorraum, und wir erhalten aus $\mathscr{F}$ durch Tensorieren mit K' über K eine Filtrierung von $V \otimes_k K' = (V \otimes_k k') \otimes_{k'} K'$. Diese Zuordnung definiert einen Funktor

$$\Phi\colon \mathrm{Fil}_k^K \longrightarrow \mathrm{Fil}_{k'}^{K'}.$$

Zeige: ist $(V, \mathscr{F}) \in \mathrm{Fil}_k^K$, so ist $(V, \mathscr{F})$ genau dann semistabil, wenn $\Phi(V, \mathscr{F}) \in \mathrm{Fil}_{k'}^{K'}$ semistabil ist.

Aufgabe 9

Sei k ein Körper und sei $X = \mathbb{P}_k^1$. Sei $\mathscr{E}$ ein lokalfreier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang n. Zeige, dass dann ganze Zahlen $d_1, \dots, d_n$ existieren, so dass

$$\mathscr{E} \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X(d_i).$$

Die d_i sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt (müssen aber natürlich nicht verschieden sein).

Hinweis: Wir beweisen das auf elementarem Wege durch Analyse der Verklebungsmatrix zweier freier Moduln vom Rang n auf den Standardüberdeckungsmengen U_0, U_1, siehe zum Beispiel [BBDG], Section 2.1. (Andere Beweise findet man in [G], Thm. 2.1 und in [VC], Introduction, Thm. 2.)

Literatur

[BBDG] L. Bodnarchuk, I. Burban, Y. Drozd, G.-M. Greuel, *Vector bundles and torsion free sheaves on degenerations of elliptic curves*, http://de.arxiv.org/pdf/math.AG/0603261

[G] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math. 79 (1957), 121–138.

[VC] *Vector bundles on Curves*, Lectures by G. Faltings (Bonn 1995), notes by M. Stoll.
http://www.math.uni-bonn.de/people/fs/skripte/vectorbuendel_faltings.ps