Analysis 3

15.10.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 23.10.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Seien $-\infty < a_j < b_j < \infty$ für $j \in \{1, ..., d\}$. Zeigen Sie, dass

$$m_*(\{x = (x_1, ..., x_d)^\top \in \mathbb{R}^d : \; a_j \leq x_j \leq b_j \text{ für alle } j \in \{1, ..., d\}\}) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j).$$

Aufgabe 2:

Sei $A \subset \mathbb{R}^d$. Zeigen oder widerlegen Sie, ob

$$m_*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\prod_{j=1}^{n} (b_j^{(n)} - a_j^{(n)}) \Big) : \; Q_n = [a_1^{(n)}, b_1^{(n)}) \times ... \times [a_d^{(n)}, b_d^{(n)}), \; A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, \right\}.$$

Hierbei wird das Infimum über all solche Rechtecke $Q_n = [a_1^{(n)}, b_1^{(n)}) \times ... \times [a_d^{(n)}, b_d^{(n)})$ mit $-\infty < a_j^{(n)} < b_j^{(n)} < \infty$ für alle $j \in \{1, ..., d\}$ genommen, sodass $A \subset \bigcup_n Q_n$.

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = m\Big(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b, \; 0 \leq y \leq f(x)\} \Big).$$

Betrachten Sie hierzu zuerst den Fall stetiger Funktionen. Begründen Sie damit insbesondere, dass $m(B) = \pi$ gilt, wobei $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : \; |x| \leq 1\}$ der Einheitsball in $\mathbb{R}^2$ ist (und $|\cdot|$ die Euklidische Norm).

Aufgabe 4: **2.5+2.5+1+4 = 10 Punkte**

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $\mathbb{Q}^d$ ist eine dichte Lebesgue-Nullmenge von $\mathbb{R}^d$ (bzgl. m).

(b) Eine Lebesgue-Nullmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ (bzgl. m) enthält keine inneren Punkte.

(c) Für jedes $t \geq 0$ existiert eine dichte Lebesgue-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ mit $m(A) \leq t$.

(d) Für jedes $t > 0$ existiert eine offene, dichte Lebesgue-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ mit $0 < m(A) < t$.