Universität Bonn
PD Dr. Pavel Zorin-Kranich
Dr. Koen van den Dungen

Abgabefrist: Freitag 11.12. um 12:00 Uhr.
Wir laden Sie erneut ein, den Help Desk auszuprobieren. Die meisten Leute die einmal dort waren kommen auch wieder. Wählen Sie eine frühere Hausaufgabe, eine Präsenzaufgabe, oder eine Skriptstelle die Ihnen nicht ganz klar ist und schauen Sie vorbei um darüber zu reden. Die Zeiten und Zugangsdaten finden Sie auf der Vorlesungs-Homepage.

Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen). (a) Sei $z := \frac{1+4i}{2-3i}$. Berechnen Sie $\Re z$, $\Im z$ und $\bar{z}$. (3 Pkt.)

(b) Sei $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < 1$. Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ die Eigenschaft $|z| \leq 1$ genau dann gilt, wenn $|z-c| \leq |1-\bar{c}z|$. (4 Pkt.)

Hinweis: Sie dürfen die Rechenregeln vom Präsenzblatt 5, Aufgabe 2(a) frei benutzen.

Aufgabe 2 (Konvergenz in Vektorräumen). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Konvergiert eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ gegen v, so konvergiert die Folge $(\|v_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen $\|v\|$. (3 Pkt.)

(b) Die umgekehrte Implikation zu (a) gilt nicht, das heißt, aus der Konvergenz der Folge $(\|v_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt nicht die Konvergenz der Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (2 Pkt.)

(c) Eine Folge $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ mit $\vec{v}_n = (v_{n,j})_{j=1}^N$ konvergiert genau dann wenn für jedes $j \in \{1, \dots, N\}$ die Folge $(v_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. (3 Pkt.)

(d) Es gibt eine beschränkte[1] Folge $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $V = (B(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ mit $\vec{v}_n = (v_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$ sodass für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folge $(v_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, aber die Folge $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V nicht konvergiert. (2 Pkt.)

Aufgabe 3 (Nullfolge). Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$ und

$$x_n := \sum_{j=0}^{n} a_j + 1/a_j, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie dass $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. (5 Pkt.)

Aufgabe 4 (Reihenkonvergenz). Bestimmen Sie für die nachfolgenden Reihen, ob sie jeweils konvergieren. Begründen Sie Ihre Antworte (Sie dürfen die Ergebnisse aus dem Skript bis einschließlich Abschnitt 6.1 und aus den Übungs- und Präsenzblättern benutzen).

(a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{3^n}{n^3}$. (2 Pkt.)

(b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{n^3+3}$. (2 Pkt.)

(c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(n^2+1)^n}{(3n^2+8n+1)^n}$. (2 Pkt.)

(d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}}$. (2 Pkt.)

[1] Ähnlich zu Definition 4.3, nennen wir eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ *beschränkt* falls die Menge $\{\|v_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 5 (Reihenkonvergenz)**.** Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Aufgabe 6 (Cauchyfolgen)**.** Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Wenn $\sum_n d(a_n, a_{n+1})$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ ist, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M. (3 Pkt.)

(b) Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $d(a_n, a_{n+1}) \leq (3/4)^n$ gilt, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M. (2 Pkt.)

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die Mathe-Weihnachtsfeier am Donnerstag, 17.12, ab 18 ct. online via Zoom statt. Alle aktuellen Informationen sind auf
`https://fsmath.uni-bonn.de/veranstaltungen-detail/events/virtuelle-mathe-weihnachtsfeier.html`
zu finden. Schaut vorbei!