Math. Vertiefung - Linearität in Algebra und Analysis
Übungsblatt 3

Abgabe: 5./6. November 2018 in den Übungsgruppen.

Aufgabe 1. (Synthetische Geometrie) Die Kegelschnitte können auch *synthetisch*, d.h. allein durch ihre geometrischen Eigenschaften ohne Benutzung von Koordinaten definiert werden. Es bezeichne PQ die Strecke zwischen zwei Punkten P, Q in der Ebene und $|PQ|$ die Distanz der beiden Punkte.

(1) Gegeben zwei Punkte $F_1 \neq F_2$ in der Ebene und eine Konstante a mit $2a > |F_1F_2|$, so heißt

$$\{P \,|\, |PF_2| + |PF_1| = 2a\}$$

die *Ellipse mit Brennpunkten* F_1, F_2 *und großer Halbachse* a.

(2) Analog für $2a < |F_1F_2|$ heißt

$$\{P \,|\, |PF_2| - |PF_1| = 2a\}$$

die *Hyperbel mit Brennpunkten* F_1, F_2 *und großer Halbachse* a.

(3) Gegeben eine Gerade L und einen Punkt $F \notin L$, so heißt

$$\{P \,|\, |PF| = |PL|\}$$

die *Parabel mit Brennpunkt* F *und Leitlinie* L.

Beweise die folgenden Eigenschaften elementargeometrisch aus den obigen Definitionen:

(a) (Brennpunkteigenschaft der Ellipse) Ist P ein Punkt auf der Ellipse und T die zugehörige Tangente, so ist der Einfallswinkel der Strecke PF_1 mit T gleich dem Ausfallswinkel der Strecke PF_2 mit T. Mit anderen Worten: die Normale in P ist die Winkelhalbierende der beiden Strecken PF_1 und PF_2.

(b) (Brennpunkteigenschaft der Hyperbel) Ist P ein Punkt auf der Hyperbel und T die zugehörige Tangente, so ist T die Winkelhalbierende der beiden Strecken PF_1 und PF_2.

(c) (Brennpunkteigenschaft der Parabel) Ist P ein Punkt auf der Parabel, T die zugehörige Tangente und G die Gerade durch P senkrecht zu L, so ist T die Winkelhalbierende der beiden Strecken PF und PL.

Diese Eigenschaften lassen sich zur Konstruktion der Tangenten verwenden.

(d) Gib in allen drei Fällen eine Konstruktion der Tangente T mit Zirkel und Lineal an.

Aufgabe 2. Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen über einem beliebigen Körper K. Bezeichne die duale Abbildung mit $f^*\colon W^* \to V^*$.

(a) Zeige: $\dim V = \dim V^*$ und $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^*)$.

(b) Folgere: der Zeilenrang einer jeden Matrix ist gleich dem Spaltenrang. (*Bemerkung:* Die Folgerung kann auch direkt bewiesen werden.)

(c) Schließe aus der Folgerung, dass $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^*)$

Aufgabe 3. Eine Sequenz von linearen Abbildungen von Vektorräumen

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \tag{1}$$

heißt *exakt* in V, wenn $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Bild}(f)$. Zeige: ist (1) exakt in V, so ist

$$W^* \xrightarrow{g^*} V^* \xrightarrow{f^*} U^* \tag{2}$$

exakt in V^*, d.h. $\mathrm{Kern}(f^*) = \mathrm{Bild}(g^*)$.