**Math. Vertiefung - Linearität in Algebra und Analysis**
**Übungsblatt 8**

Abgabe: 10./11. Dezember 2018 in den Übungsgruppen.

**Aufgabe 1.** Auf dem Gebiet $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten $(t, \mathfrak{x})$ sei eine Funktion $\underline{f}\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ definiert, die stetig nach $t$ und $\mathfrak{x}$ differenzierbar ist. Zeige: $\underline{f}$ ist lokal Lipschitz-stetig, d.h. für jeden Punkt von $\mathcal{G}$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathcal{G}$ und eine Konstante $L \geq 0$, sodass für alle $(t, \mathfrak{x}), (t, \mathfrak{x}^*) \in U$ gilt:

$$|\underline{f}(t, \mathfrak{x}) - \underline{f}(t, \mathfrak{x}^*)| \leq L \cdot |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*|.$$

**Aufgabe 2.** Zeige, dass die beiden Differentialgleichungen

$$\ddot{x} - x = 0,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1 \tag{1}$$

und

$$\ddot{x} - x = 0,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0 \tag{2}$$

genau eine Lösung besitzen; diese nennen wir im Falle (1) den *Sinus hyperbolicus* $\sinh(t)$ und im Falle (2) den *Kosinus hyperbolicus* $\cosh(t)$. Beweise daraus die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Ableitungen sind $(\dot{\sinh})(t) = \cosh(t)$ und $(\dot{\cosh})(t) = \sinh(t)$.

(ii) Es gilt $\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Es gelten die Additionstheoreme

$$\sinh(s + t) = \sinh(s)\cosh(t) + \cosh(s)\sinh(t)$$

und

$$\cosh(s + t) = \cosh(s)\cosh(t) + \sinh(s)\sinh(t).$$

**Aufgabe 3.** Skizziere die Phasenkurven der *ungedämpften Schwingungsgleichung*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

**Aufgabe 4.** Es sei $A$ eine $(n \times n)$-Matrix und $\underline{b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Löse das inhomogene System von Differentialgleichungen

$$\dot{\mathfrak{x}} = A\mathfrak{x} + \underline{b}(t)$$

durch Variation der Konstanten.