1. Hinweise zu Testat 6

Zur Lösung der Aufgabe sind die Nullstellen des Nenners zu ermitteln. Die Aufgaben werden so gestellt, daß diese stets ganzzahlig oder ganzzahlige Vielfache von i sind. Die Auffindung der Nullstellen gelingt dann leicht durch Anwendung des folgenden Satzes, der, in einer etwas kürzeren Fassung, in der Vorlesung schon erwähnt wurde:

Sei

$$P(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} p_n t^n \tag{1}$$

ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Wenn r eine rationale Zahl mit $P(r) = 0$ oder $P(r \cdot i) = 0$ ist, so ist r eine ganze Zahl und ein Teiler von p_0. Im Fall $P(r \cdot i) = 0$ ist sogar r^2 ein Teiler von p_0. Wenn sogar $P(r \cdot i) = 0$ und eine (bzw. beide) der Gleichungen $P(\pm r) = 0$ gelten, so ist p_0 sogar durch r^3 (bzw. r^4) teilbar.

Da das Programm Nullstellen mit großem Absolutbetrag (derzeit: > 3) meidet, erzugt es relativ oft Polynome, für die 0 eine Nullstelle ist und entsprechend p_0 verschwindet. In diesem Fall muß vor der Anwendung des Satzes zur Nullstellensuche der Faktor t ausgeklammert werden.

Für die Rechnungen zur Auffindung der Nullstellen kommen verschiedene Vereinfachungen in Frage. Häufig (gerade auch in Computerprogrammen) ist es sinnvoll, das Horner-Schema

$$P(t) = p_0 + t * (p_1 + t * (p_2 + \dots))$$

zu verwenden. Eine andere Vereinfachung ist die gemeinsame Untersuchung von $P(\pm t)$:

$$P(\pm t) = p_0 + t^2 * (p_2 + t^2 * (p_4 + \dots)) \pm t\Big(p_1 + t^2 * (p_3 + t^2 * (p_5 + \dots))\Big)$$

Als Beispiel betrachten wir die Aufgabe, das Kurvenintegral

$$\oint \frac{\exp(z^2)\, dz}{z^4 - 2 * z^3 + 9 * z^2 - 18 * z}$$

über einen mathematisch positiv zu durchlaufenden Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 zu berechnen.

Es gilt

$$P(z) = z^4 - 2 * z^3 + 9 * z^2 - 18 * z = z(z^3 - 2 * z^2 + 9 * z - 18),$$

und es sind alle Nullstellen des zweiten Faktors

$$Q(z) = z^3 - 2 * z^2 + 9 * z - 18$$

zu bestimmen.[1]

Wir probieren schrittweise die Teiler von 18 und versuchen, durch Anwendung des Horner-Schemas und der oben vorgeschlagenen gemeinsamen Behandlung von $\pm z$,

$$Q(\pm z) = (-2 * z^2 - 18) \pm z * (z^2 + 9)$$

unser Glück zunächst mit ± 2:

$$Q(\pm 2) = (-2 * 2^2 - 18) \pm 2 * (2^2 + 9) = -26 \pm 26.$$

Also ist $z = 2$ eine Nullstelle des Polynomes.[2].

Wir untersuchen weiter den Teiler 3 von 18 und versuchen unser Glück zuerst mit 3*i:

$$Q(\pm 3 * i) = (2 * (3 * i)^2 - 18) \pm 3 * i(-9 + 9) = 0 \pm 0 = 0.$$

Also sind $\pm 3i$ Nullstellen von P, und es sind alle Nullstellen von P gefunden: 0, 2 und $\pm 3i$. Von diesen liegt nur 0 im Inneren des Kreises, über dessen Peripherie integriert wird[3]. Für die Ableitung von P an dieser Stelle finden wir $P'(0) = -18$, und die Antwort ist

$$2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{z^2}}{P(z)} = -\frac{2\pi i}{18} = -\frac{\pi i}{9}.$$

Auf die genaue Formulierung der Aufgabenstellung ist zu achten, denn das Programm erzeugt auch Aufgaben, bei denen der Kreis mathematisch negativ zu durchlaufen ist und entsprechend ein Vorzeichenwechsel eintritt.

[1]Was in dem gegebenen Fall aber nicht wirklich notwendig ist, siehe die dritte Fußnote.

[2]Die Untersuchung von $\pm 2i$ kam von vornherein nicht in Betracht, da 18 nicht durch 4 teilbar ist

[3]Wovon man sich natürlich ohne Berechnung der anderen Nullstellen überzeugen könnte, wenn man den obigen Bemerkungen über die Auswahl der komplexen Nullstellen durch das Programm Glauben schenkt. Allerdings kann es zur Auffindung von Rechenfehlern sinnvoll sein, wirklich alle Nullstellen zu bestimmen, um auszuschließen, daß man durch einen Rechenfehler eine im Inneren des Kreises gelegene Nullstelle übersehen hat. Auf dem Rand des Kreises sollten übrigens keine Nullstellen des Polynomes liegen, denn dann würde das Integral nicht konvergieren. Ich habe das Programm so geschrieben, daß es diesen Fall nicht zuläßt, würde aber, falls mir das mißglückt ist und derart fehlerhafte Aufgabenstellungen genau die Testate als richtig bearbeitet akzeptieren, die in diesem Fall erklären, daß das Integral undefiniert ist.