Doktorandenseminar vom GRK im WS09/10 zum Thema: Relative homologische Algebra an den Beispielen der Hochschild- und André-Quillen-Theorie

Das Herzstück der homologischen Algebra bildet die Theorie der derivierten Funktoren, welche systematisch die Nichtexaktheit von additiven Funktoren zwischen abelschen Kategorien messen. Zentrale Beispiele hiervon sind die Ext- und Tor-Funktoren auf Modulkategorien, die etwa vermöge projektiver Auflösungen berechnet werden können. Die projektiven Moduln sind per Definition genau die Moduln, welche die Liftungseigenschaft bzgl. *aller* Epimorphismen besitzen. Wählt man nun eine projektive Klasse $\mathcal{E}$ von Epimorphismen, erhält man die zugehörige Klasse $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$ der relativ $\mathcal{E}$ projektiven Moduln. Die Theorie der homologischen Algebra kann in diesem relativen Setting erneut durchgeführt werden, indem die Rolle aller Epis von der Klasse $\mathcal{E}$ und die Rolle der projektiven Moduln von der Klasse $\mathcal{P}$ übernommen werden, und führt so zur Theorie der relativ $\mathcal{E}$ derivierten Funktoren (Vorträge 1-4).
Hiermit verwandt ist die Theorie der Triple und Kotriple, wobei es sich formal (sehr erhellend!) um Monoide bzw. Komonoide in Kategorien von Endofunktoren handelt. Wegen der Dreiecksidentitäten induzieren Adjunktionen Triple und Kotriple und führen so zu kanonischen simplizialen bzw. kosimplizialen Objekten. Anders als auf dem Niveau der Komplexe induzieren beliebige (auch nicht-additive) Funktoren welche auf dem Niveau der (ko-)simpliziale Objekte. Die Dold-Kan-Korrespondenz erlaubt nach der Wahl eines Tripels/Kotripels somit 'ein Derivieren von Funktoren' in allgemeineren Situationen, solange die Zielkategorie dieser Funktoren nur abelsch ist. Dieses führt zur sogenannten Triple-Kohomologie und Kotriple-Homologie und den beiden kontravarianten Formen (Vorträge 5-6).
Die für assoziative Algebren eingeführte Hochschild-Theorie und die von André [And67] und Quillen [Qui70] zeitgleich untersuchte Kohomologietheorie für kommutative Algebren sind Beispiele für die obigen Konstruktionen. Bei der Hochschild-Theorie handelt es sich um relative Ext- bzw. Tor-Funktoren. Von dieser Theorie wollen wir neben den Dimensionen 0 und 1 im allgemeinen, von der Homologie alle Dimensionen für symmetrische und später glatte Algebren (Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem) verstehen (Vorträge 7-8). Die André-Quillen-Theorie liefert 'derivierte Funktoren von Differentialen und Derivationen' und wird über simpliziale Auflösungen von Algebren und den sog. Kotangentialkomplex berechnet. Hierbei handelt es sich anscheinend um eine der ersten wichtigen Anwendungen der von Quillen eingeführten Theorie der Modellkategorien. Nachdem die Konstruktion der AQ-Theorie zu Fuß geliefert wurde, wird der Folgevortrag die Sprache der Modellkategorien benutzen, um zunächst alle auf dem Fußweg bemerkten schmutzigen Details zu verstecken. Insbesondere erlaubt dieser Zugang aber einen flexibleren Umgang mit simplizialen Auflösungen, so dass die fundamentalen strukturellen Eigenschaften der André-Quillen-Theorie bewiesen werden können (Vorträge 9-12). Einen Zusammenhang zwischen der André-Quillen- und der Hochschild-Theorie wird über eine Spektralsequenz hergestellt: höhere André-Quillen-Homologie konvergiert gegen Hochschild-Homologie. Hiermit läßt sich dann das HKR-Theorem beweisen (Vortrag 13).
Vorübergehend wird der Abschluss des Seminars einen Ausblick auf die topologischen Varianten der Hochschild- und/oder André-Quillen-Theorie liefern. Da

dieses Semester theoretisch sogar für 16 Vorträge Zeit wäre, könnten wir in dem Fall, dass wir gut durchkommen, am Ende des Semesters eventuell noch etwas anderes behandeln (z.B. Charakterisierung von glatt bzw. étale über André-Quillen-Theorie oder ausführlichere Einführung in die topologischen Varianten).

1. **Vortrag: Absolute homologische Algebra (15.10.09)**
   Fundamentallemma der homologischen Algebra (comparison thm 2.2.6 in [Wei94]), derivierte Funktoren, (universelle) δ-Funktoren, Hufeisenlemma, derivierte Funktoren sind universelle δ-Funktoren, dimension shifting, F-azyklische Objekte, Berechenbarkeit durch F-azyklische Objekte (nach Kapitel 2 in [Wei94])

2. **Vortrag: Ext, $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}}$ und die Universalität von Ext (15.10.09)**
   • Definition von Ext über projektive Auflösungen, Erwähnung der Balanziertheit (evtl. Spektralsequenzargument liefern), elementare Berechnungen von $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}$, Ext für endlich-erzeugte abelsche Gruppen, Satz von Stein-Serre, Whitehead-Vermutung und Lösung von Shelah (nach Kapitel III und Seite 330 in [HS97] sowie [She74])
   • Universalität von Ext (=derivierteses Yoneda-Lemma, Korollar 10.2 aus Kapitel IV von [HS97], evtl. auch Abschnitt 6.6 in [Osb00])

3. **Vortrag: (Ko-) Homologie von Gruppen (29.10.09)**
   Invarianten und Koinvarianten von G-Moduln, (Ko-) Homologie von Gruppen, Ext- und Tor-Interpretation, Bar-Auflösung, Zshg. mit klassifizierendem Raum BG, elementare Berechnung (nach Kapitel 6 aus [Wei94])

4. **Vortrag: Relative homologische Algebra (29.10.09)**
   projektive Klassen von Epimorphismen $\mathcal{E}$, Fundamentallemma der relativen homologischen Algebra (1.3 in Kapitel IX von [HS97]), relatives Hufeisenlemma (Beweisskizze?), $\mathcal{E}$-derivierte Funktoren, $\mathcal{E}$-Satelliten, $\mathcal{E}$-derivierte Funktoren liefern $\mathcal{E}$-Satelliten, treue Rechtsadjungierte liften projektive Klassen (nach Kapitel IX aus [HS97])

5. **Vortrag: Standardkonstruktionen (12.11.09)**
   Dold-Kan-Korrespondenz, links/rechts kontrahierbare, augmentierte simpliziale Objekte, Definition von Kotripel, Tripel, Adjunktionen liefern Tripel und Kotripel, Kotripel-projektive Objekte, kanonische Auflösungen, Bar-Auflösung aus Vortrag 3 (und eventuell Godement-Auflösung von Garben (Namensgeber von Standardkonstruktionen)) als Beispiel (nach den Abschnitten 8.4 und 8.6 aus [Wei94])

6. **Vortrag: Kotripel-Homologie, Tripel-Kohomologie (12.11.09)**
   Definition von Kotripel-Homologie, Tripel-Kohomologie, Tripel-derivierte Funktoren, Eindeutigkeitssatz, relatives Ext und Tor als Beispiel, Berechenbarkeit durch relativ spaltende, Kotripel-projektive Auflösungen, Berechenbarkeit von relativem Tor durch relativ flache Moduln (nach Abschnitt 8.7 aus [Wei94])

7. **Vortrag: Hochschild-Homologie und Hochschild-Kohomologie I (26.11.09)**
   definierenden Hochschild-Komplex, H^0 und H_0, Hochschild als relatives

Ext bzw. Tor, im projektiven bzw. flachen Fall Hochschild als absolutes Ext bzw. Tor über dem einhüllenden Ring, Derivationen und H^1 (nach den Abschnitten 1.1, 1.3, 1.5 aus [Lod98] und 9.1, 9.2 aus [Wei94])

8. **Vortrag: Hochschild-Homologie und Hochschild-Kohomologie II (26.11.09)**
   H^2 und Erweiterungen, im kommutativen Fall Kähler-Differentiale und die äußere Algebra der Differentialformen, Beispiel der Polynomringe, Antisymmetrisierungsabbildung, Hochschild-Homologie für symmetrische Algebren (nach den Abschnitten 1.3, 1.5 und 3.2 aus [Lod98])

9. **Vortrag: André-Quillen-(Ko-)Homologie I (10.12.09)**
   • Jacobi-Zariski-Sequenz und die duale Sequenz, Definition der AQ-Kohomologie D^* und AQ-Homologie D_*, Berechnung für Polynomringe, (nach Abschnitt 8.8 aus [Wei94])
   • simpliziale Algebren und simpliziale Moduln über simplizialen Algebren, simpliziale Auflösungen und der Kotangentialkomplex, neue Definition von D^* und D_* (nach Abschnitten 4 und 5 aus [Iye06])

10. **Vortrag: André-Quillen-(Ko-)Homologie II (10.12.09)**
    Modellstrukturen auf simplizialen Moduln und simplizialen Algebren, Beschreibung der Kofaserungen über freie Abbildungen, Abelianisierung im Beispiel der Überkategorie von simplizialen Algebren, D^* und D_* in diesem Rahmen, Beispiel der freien Algebren (nach Abschnitt 4 aus [GS06] und Abschnitten 1 und 2 sowie Proposition 3.1 aus [Qui68])

11. **Vortrag: André-Quillen-(Ko-)Homologie III (07.01.09)**
    Kotangentialkomplex ist projektiv, kurze exakte Sequenz von Moduln induziert lange exakte Sequenz, Spektralsequenz: universelle Koeffizienten, D^0 und D_0, D^1 und Algebra-Erweiterungen (nach Abschnitt 3 aus [Qui68])

12. **Vortrag: André-Quillen-(Ko-)Homologie IV (07.01.09)**
    Erweiterung der Definition von AQ-Homologie und AQ-Kohomologie auf simpliziale Algebren über simplizialen Ringen, zwei komponierbare Abbildungen $R \longrightarrow S \longrightarrow T$ von simplizialen Ringen liefern Kofasersequenz für Kotangentialkomplexe, 'erweiterte' Jacobi-Zariski-Sequenzen (nach Abschnitt 4 aus [Qui68])

13. **Vortrag: Spektralsequenz: höhere AQ gegen Hochschild, HKR-Theorem (21.01.09)**
    Glatte Algebren, höhere André-Quillen-Homologie $\mathrm{D}_*^{(q)}$, $\mathrm{D}_*^{(q)}$ für glatte Algebren, Spektralsequenz im Fall einer flachen kommutativen Algebra: höhere AQ-Homologie gegen Hochschild-Homologie, HKR-Theorem im glatten Fall: Hochschild-Homologie $\cong \Omega^*$ (nach Abschnitt 3.5 aus [Lod98])

14. **Vortrag: Ausblick auf topologische Varianten der Hochschild- und André-Quillen-Theorien (21.01.09)**

References

[And67] Michel André. *Méthode Simpliciale en Algèbre Homologique et Algèbre Commutative*, volume 32 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1967.

[GS06] Paul Goerss and Kristen Schemmerhorn. Model categories and simplicial methods. `http://arxiv.org/abs/math/0609537`, 2006. Preprint.

[HS97] P.J. Hilton and U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1997.

[Iye06] Srikanth Iyengar. André-quillen homology of commutative algebras. `http://arxiv.org/abs/math/0609151`, 2006. Preprint.

[Lod98] Jean-Louis Loday. *Cyclic Homology*, volume 301 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, second edition, 1998.

[Osb00] M. Scott Osborne. *Basic Homological Algebra*, volume 196 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2000.

[Qui68] D. Quillen. Homology of commutative rings, 1968. mimeographed notes, MIT.

[Qui70] D.G. Quillen. On the (co-) homology of commutative rings. *Proc. Symp. Pure Math.*, pages 65–87, 1970.

[She74] S. Shelah. Infinite abelian groups, whitehead problem and some constructions. *Israel J. Math.*, pages 243–256, 1974.

[Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1994.