Einsteins Uhren gehen richtig

Hermann Karcher, Bonn, Juni 2005

Einsteins Relativitätstheorie hat als Gedankenexperiment begonnen, erst 50 Jahre später häuften sich die bestätigenden Experimente und vor 25 Jahren begann sie, im Alltag aufzutreten. Trotzdem reagieren noch heute viele Leute mit Verwunderung auf die Feststellung, daß die Zeit an verschiedenen Punkten der Erde, oder auch in Flugzeugen, verschieden schnell vergeht. Zunächst will ich erklären, was mit dieser Behauptung genau gemeint ist. Danach versuche ich zu erklären, warum dies verschieden schnelle Verstreichen der Zeit bei genauem Hinsehen ganz natürlich ist.

Was sind Uhren?

Die ersten Präzisionsuhren waren Pendeluhren. Sie hatten einen sowohl für die Astronomie wie für die Schiffahrt schweren Nachteil: während jeden Transportes verloren sie ihre Genauigkeit. Uhren mit Unruhe und später Quarzuhren waren genaue und transportable Zeitmesser. Diese klassischen Uhren haben ein gemeinsames Prinzip: Sie besitzen einen Taktgeber (Pendel, Unruhe, schwingendes Quarzplättchen), einen Mechanismus, der die Anzahl der Schwingungen des Taktgebers auf eine Anzeige überträgt und einen Antrieb, der verhindert, daß der Taktgeber stehen bleibt. Im Augenblick sind Atomuhren unsere genauesten Uhren. Im Prinzip funktionieren sie so, daß zwei Energieniveaus von Cäsiumatomen ausgewählt wurden und daß die Anzahl der Schwingungen der Übergangsstrahlung während eines Zeitintervalls die Länge dieses Zeitintervalls angibt. Technisch wird zunächst so ähnlich wie in einem Mikrowellensender eine elektromagnetische Welle hergestellt, die ungefähr die Frequenz der Übergangsstrahlung hat. Wenn die hergestellte Welle genau die richtige Frequenz hat, wird sie von den Cäsiumatomen absorbiert. Dadurch werden die magnetischen Eigenschaften der Cäsiumatome verändert. Deshalb kann man feststellen, wenn die hergestellte Welle nicht die richtige Frequenz hat, so daß man also deren Frequenz nachregeln muß. Die Frequenz der Übergangsstrahlung zwischen den beiden Cäsiumniveaus ist also der Taktgeber dieser *natürlichen* oder *elementaren* Uhren und gezählt werden die Schwingungen der hergestellten Welle. Es spielt im folgenden keine Rolle, welche Vorstellungen von "Zeit" Sie mitbringen, denn in die Theorien und Vorhersagen der Physiker geht nur die *gemessene Zeit* ein, im Augenblick die mit Atomuhren gemessene Zeit. Atomuhren waren schon vor 1980 so gut, daß zwei Physiker sie in einem Verkehrsflugzeug mitnehmen konnten, um festzustellen, daß in der Tat während des Fluges die von Einstein vorhergesagte Änderung des Verstreichens von Zeit stattfand. Andererseits haben sich bei der Inbetriebnahme der GPS-Satelliten Physiker und Ingenieure nicht über die Synchronisation der kreisenden Uhren einigen können und vorsichtshalber zwei verschiedene Ablesevorrichtungen eingebaut – die nichtrelativistische lag so daneben, daß das System nicht funktionierte. (Die Zeit, 16.12.2004, S.39, nach Neil Ashby: http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-1/).

Bei unseren Atomuhren hat die Festlegung auf Cäsium technische Gründe. Im Prinzip können wir die Frequenz der Übergangsstrahlung zwischen irgend zwei Energieniveaus als Taktgeber für Zeitmessung ansehen. Das bringe ich jetzt in Verbindung mit einer fundamentalen Tatsache der Astronomie:

> Für alle im Licht von Sternen oder Galaxien beobachteten Spektrallinien gilt, daß die *Verhältnisse aller beobachteten Frequenzen* dieselben sind wie in den Laboratorien auf der Erde. (Bild: Fraunhofer Linien)

Für unsere Zwecke formuliere ich das so um: An jeder Stelle des Universums gehen die *dort* befindlichen Atomuhren alle gleich schnell. Die Verschiebung der Frequenzen um einen konstanten Faktor stört bei dieser Aussage nicht, da eine solche Verschiebung zum Beispiel durch die Relativbewegung der Sterne, den sogenannten Dopplereffekt, verursacht werden kann. Es gibt keine Beobachtung, die der Hypothese widerspricht: *Atomuhren* **messen** *an jeder Stelle des Universums die dort verstreichende Zeit.* Gemeint ist: Einsteins Zeit.

Beobachtung verschieden schnell gehender Uhren

Was für ein Experiment können wir uns denken, um verschieden schnell gehende Uhren auf der Erde zu beobachten? Im Prinzip können wir uns neben eine Uhr setzen, so daß wir außer dieser noch eine weitere Uhr anderswo beobachten können, wir vergleichen die angezeigten Zeiten und wenn sie verschieden sind, sagen wir: Die Zeit vergeht an diesen Orten verschieden schnell. Skeptiker würden das natürlich nicht sagen, sondern bei den Uhren einen Fehler vermuten. Deshalb möchte ich noch eine andere Sorte Uhren schildern, die zwar bisher nicht so genau gebaut werden können wie die Atomuhren, die aber, auf mich zumindest, einen derart robusten Eindruck machen, daß ich nicht weiß, wie man an ihnen zweifeln könnte. Diese Uhren messen das Verstreichen von Zeit mit Hilfe des Zerfalls radioaktiven Materials: In dem Augenblick, in dem nur noch halb so viel Material wie am Anfang übrig ist, ist eine Zeiteinheit, genannt Halbwertszeit des verwendeten Materials, vergangen. Sicher haben Sie gehört, daß eine Variation dieser Idee in der Archäologie verwendet wird. Es gibt keine Beobachtungen, die darauf hindeuten, daß diese Zerfallsuhren etwa nicht synchron gingen mit den vorher beschriebenen Atomuhren. Wenn zwei Physiker zwei gleich große Stücke Radium bekommen und diese dann an zwei verschiedenen Stellen bewachen, um nach einiger Zeit festzustellen, daß der Vorrat des einen schneller verschwindet als der des anderen, dann ist das schwer anders auszudrücken als mit den Worten: *Bei dem einen vergeht die Zeit schneller als bei dem anderen* — wieder bis auf den Einwand des Skeptikers: Eine solche Beobachtung muß man erst einmal machen.

Nun, in der Zeit, als ich Student war, haben die Physiker Pound und Rebka genau dieses Experiment gemacht. Sie stellten eine (verallgemeinerte) Atomuhr auf der Erde auf, eine zweite in einem 20m hohen Turm senkrecht darüber. Die untere Uhr schickt in regelmäßigen Abständen Zeitsignale nach oben. Technisch einfacher schickt sie die Welle, die zu dem Übergang zwischen den beiden ausgewählten Energieniveaus gehört. Es wird also direkt der Taktgeber der einen Uhr an die andere geschickt. Wenn die Welle bei der oberen Uhr ankommt, kann man ihre Frequenz messen. Dann weiß man, wie viele Zeitsignale der unteren Uhr in einer Zeiteinheit der oberen Uhr oben ankommen. Genau diese Beobachtung entscheidet darüber, ob die Zeit an den Orten der beiden Uhren gleich schnell verstreicht oder nicht. Wenn beide Atomuhren mit denselben Energieniveaus derselben Atomsorte arbeiten und wenn die Welle von unten mit kleinerer Frequenz ankommt, dann müßten wir dazu sagen: Die untere Uhr läuft langsamer. Aber passiert das? Und kann man es verstehen? Ja! Pound und Rebka stellten fest: *bei der oberen Uhr verstreicht die Zeit schneller.* Aber ihr Experiment war noch besser. Es passiert in der Physik bei unterschiedlichen Gelegenheiten, daß das Ergebnis eines im Detail sehr komplizierten Prozesses mit Hilfe des Energiesatzes ohne Diskussion der Details vorhergesagt werden kann. Das ist hier in spektakulärer Weise auch so, jede der folgenden Feststellungen steht nämlich mit einem Nobelpreis in Verbindung. Aus einer elektromagnetischen Welle der Frequenz ν kann man Energie nur in Portionen der Größe $E = \hbar \cdot \nu$ absorbieren. Diese Portionen heißen Photonen; sie besitzen nach Einstein eine Masse m, die sich aus der berühmten Formel $E = m \cdot c^2$ ergibt, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Eine Masse, die im Schwerefeld der Erde die Strecke s nach oben fliegt, verliert an kinetischer Energie so viel wie sie an potentieller Energie gewinnt: $\Delta E = m \cdot g \cdot s$. Das Experiment von Pound und Rebka zeigte, daß diese Anwendung des Energiesatzes auch für Photonen gilt, und zwar mit der ihnen von Einstein zugeschriebenen Masse $m = \hbar \cdot \nu / c^2$. Daraus ergibt sich folgende Abnahme der Frequenz: $\Delta\nu = \Delta E/\hbar = \nu \cdot gs/c^2$. Diese wirklich winzige Frequenzabnahme konnten Pound und Rebka beobachten, aber auch dazu bedurfte es eines Effektes, für dessen Entdeckung Mösbauer den Nobelpreis erhalten hatte. Zusammenfassend können wir sagen:

> Die tiefer stehende Uhr geht genau in demselben Verhältnis langsamer in dem Photonen beim nach oben Fliegen Energie verlieren, denn dadurch wird der Abstand von Zeitsignalen vergrößert. Das unterschiedliche Gehen der Uhren verläuft also in Übereinstimmung mit dem Energiesatz. Kann man sich, bei Kenntnis des Experimentes von Pound und Rebka, eine andere Vorstellung vom Verstreichen von Zeit, von gemessener Zeit, machen?

Relativ zueinander bewegte Uhren

Wir wollen jetzt von der Schwerkraft absehen und stellen uns beobachtende Physiker vor, in deren Bezugssystemen (Laboratorien) sich keinerlei Beschleunigungen feststellen lassen. *Sie dürfen sich aber relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.* Soweit wir wissen, müssen die Gesetze der Physik in all diesen Bezugssystemen gleich lauten. Diese Tatsache wird nun als *Äquivalenzprinzip* postuliert, da bisher keinerlei Beobachtungen oder Gedankenexperimente andeuten, daß sie falsch sein könnte. Trotzdem sind diese Bezugssysteme eine Idealisierung: Wir können keinem Physiker ein solches zur Verfügung stellen, weil wir die Schwerkraft nicht abschalten können. Diese idealisierten Bezugssysteme sind nun gleichberechtigte Koordinatensysteme für die vierdimensionale Welt der *Speziellen Relativitätstheorie* und zwar in ganz ähnlicher Weise, wie wir das aus unserem dreidimensionalen Euklidischen Anschauungsraum kennen. Diese besser bekannte analoge Situation fasse ich kurz zusammen. Wenn wir mit Hilfe dreier paarweise aufeinander senkrechter Einheitsvektoren Koordinaten einführen, genannt *Höhe, Breite, Tiefe*, so sehen alle geometrischen Berechnungen in verschiedenen solchen Koordinatensystemen völlig gleich aus. Insbesondere gilt das für die Länge von Kurven. Ganz sicher wird es niemanden wundern, daß verschiedene Kurven, die dieselben Punkte verbinden, in der Regel *nicht* gleich lang sind. Sobald ich nun die analoge Geometrie der speziellen Relativitätstheorie beschrieben haben werde, wird es ebenso selbverständlich sein, daß man es beim Transport von Atomuhren, der in einem gleichzeitigen Ausgangspunkt beginnt und auf verschiedenen "Weltlinien" zu einem gleichzeitigen Endpunkt verläuft, erleben kann, daß die von diesen Uhren gemessene verstrichene Zeit *verschieden* ist (z.B. daß zwei ursprünglich gleich große Klumpen Radium unterschiedlich weit zerfallen sind, d.h., daß zwei Zwillinge unterschiedlich gealtert sind). Zur Herleitung der Geometrie der speziellen Relativitätstheorie müssen wir uns, neben dem Äquivalenzprinzip, auf eine fundamentale Hypothese Einsteins stützen: *Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ist unabhängig davon, welcher der gleichberechtigten Beobachter das Licht ausgesandt hat. In üblicher Kurzfassung: die Lichtgeschwindigkeit ist konstant.* Diese konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen war schon vor Einstein in Maxwells Theorie solcher Wellen enthalten. Und kurz vor der Veröffentlichung der Speziellen Relativitätstheorie war der Ausgang des Michelson-Morley Experiments eine weitere experimentelle Bestätigung von Einsteins Hypothese.

Die Geometrie der Speziellen Relativitätstheorie

Das Hauptproblem: Betrachten wir zwei Physiker in unbeschleunigten Bezugssystemen, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit v gegeneinander bewegen. Sie fliegen so dicht es geht aneinander vorbei, und sie stellen beide in diesem Treffpunkt ihre Uhren auf null. Wenn die Uhren $t = 1$ zeigen, schickt jeder ein Lichtsignal hinter dem anderen her.

> *Welche - wegen des Äquivalenzprinzips gleichen - Zeiten T zeigen die Uhren beim Eintreffen der Signale*?

Die Kenntnis dieser Empfangszeit erklärt das Verhalten bewegter Uhren vollständig!

Zur Beantwortung der Frage beschließen die beiden, sofort bei Empfang der Signale diese noch einmal zurückzuschicken. Als Ankunftszeit, nun in ihren eigenen Systemen, erwarten sie – wieder wegen des Äquivalenzprinzips – die Zeit T^2. Beide verwenden natürlich dieselben Zeiteinheiten (weil sie dieselben Uhren haben). Die Längeneinheit verabreden sie so, daß die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ ist. Nun kann jeder der beiden Physiker die Weltlinie des anderen und die Weltlinien der Lichtsignale in seinem Koordinatensystem eintragen. Sie lösen zwei lineare Gleichungen und finden die fundamentale Beziehung

$$T^2 = \frac{c+v}{c-v}.$$

Damit kann jeder der beiden in seinem Koordinatensystem *auf der Weltlinie des anderen* den Zeitpunkt $t = 1$ eintragen! Beide finden, daß alle diese Zeit-Einheitspunkte – auch für alle weiteren sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit bewegenden Physiker – auf der Fläche $t^2 - |x|^2 = 1$ liegen. (Insbesondere gibt es auf den Weltlinien von Lichtsignalen keine Zeit-Einheitspunkte.) Die beiden Physiker haben damit für die Geometrie der Speziellen Relativitätstheorie das gemacht, was dem Ausmessen einer Kugel vom Radius 1 in unserem Anschauungsraum entspricht.
Die vom Koordinatensystem unabhängige Größe $t^2 - |x|^2$ spielt nun in der Relativitätstheorie dieselbe Rolle, wie das mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnete Abstandsquadrat zwischen zwei Punkten $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$ im Euklidischen Raum,

das ja gleich $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ ist. Im Euklidischen Raum führt diese Pythagorasformel zur Berechnung der Länge auch gebogener Kurven. Ganz analog dazu erlaubt uns die Unabhängigkeit des Ausdrucks $t^2 - |x|^2$ vom verwendeten Koordinatensystem etwas Erstaunliches: *Die Berechnung einer zeitartigen Bogenlänge von Weltlinien* – und diese gibt an, wie viel Zeit (gemessen mit Atomuhren) auf jeder auch nicht geraden Weltlinie verstreicht. Skeptiker dürfen auch das nicht ohne Experimente glauben. Aber die Beobachtung von kurzlebigen Teilchen auf unbeschleunigten und auf stark beschleunigten Weltlinien hat ergeben, daß die verstrichene Zeit wirklich von der Beschleunigung nicht beeinflußt wird und mit der zeitartigen Bogenlänge der Weltlinien übereinstimmt. Deswegen ist es leicht, Weltlinien mit gleichem Anfangs- und Endpunkt anzugeben, auf denen die verstrichene Zeit verschieden ist, auf denen Zwillinge verschieden altern, auf denen verschieden viel Radium zerfällt. Zum Beispiel lassen wir die eine Atomuhr einfach in einem beschleunigungsfreien Bezugssystem stehen, die zweite transportieren wir auf eine Kreisbahn um die erste und lassen sie eine Weile mit erheblicher Geschwindigkeit kreisen, ehe wir sie zurückholen. Dann ist auf der zweiten Uhr weniger Zeit verstrichen. Man kann das beobachten, indem man kurzlebige Teilchen in Beschleunigern kreisen läßt: Von außen betrachtet überdauern sie viel mehr Umläufe, als ihre Lebensdauer – von außen betrachtet – ihnen erlauben würde. Sie kreisen so oft, weil auf der kreisenden Weltlinie die Zeit langsamer verstreicht. – Man kann unterschiedlich verstreichende Zeit sogar in zwei unbeschleunigten Bezugssystemen beobachten, nur handelt es sich dann nicht um Weltlinien mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Deshalb müßte auch diskutiert werden, welche Abstände in verschiedenen Bezugssystemen gemessen werden. Experimentell handelt es sich um Mesonen, die in der oberen Atmosphäre entstehen und am Boden beobachtet werden. Sie sind so kurzlebig, daß ihre Lebensdauer, *von uns aus gemessen*, nicht ausreicht, um die Atmosphäre zu durchqueren, nicht einmal mit Lichtgeschwindigkeit. Aber, die Zeit verstreicht für jedes Meson eben nicht wie wir sie messen, sondern entsprechend der zeitartigen Bogenlänge seiner Weltlinie in der Minkowskigeometrie.

Ich wiederhole noch einmal:
1.) Weil nach Pound und Rebka in einem Schwerefeld aufwärts fliegende Photonen so viel Energie verlieren, wie die aus $E = mc^2 = \hbar\nu$ bestimmte Masse die potentielle Energie zunehmen läßt, deshalb kann man angeben, wie der Abstand zwischen Zeitsignalen zunimmt, d.h., um wie viel schneller höher oben stehende Uhren gehen.
2.) Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit liegen die Zeit-Einheitspunkte auf allen unbeschleunigten Weltlinien in allen unbeschleunigten Bezugssystemen auf der 'Eich'fläche $t^2 - |x|^2 = 1$. Deshalb kann man auf allen Weltlinien eine zeitartige Bogenlänge angeben und diese stimmt mit der gemessenen verstrichenen Zeit überein. Natürliche Uhren messen auf jeder einzelnen Weltlinie, wie dort die Zeit verstreicht.

Experimentelle Basis der Speziellen Relativitätstheorie:
    http://www.atomki.hu/fizmind/specrel/experiments.html
Uhrendebatte vor dem Start von GPS:
    http://www.leapsecond.com/history/Ashby-Relativity.htm

Anhang

1.) Aus elektromagnetischen Wellen kann man Energie nur in Portionen

$$E = \hbar \cdot \nu$$

absorbieren. Diese Portionen heißen Photonen. (Einsteins Nobelpreis)

2.) Diese Photonen haben eine Masse m **nach Einsteins berühmtester Formel**

$$\textbf{allgemein: } E = m \cdot c^2, \qquad \textbf{für Photonen: } m = \frac{\hbar \cdot \nu}{c^2}.$$

Hierin ist c **die Lichtgeschwindigkeit.**

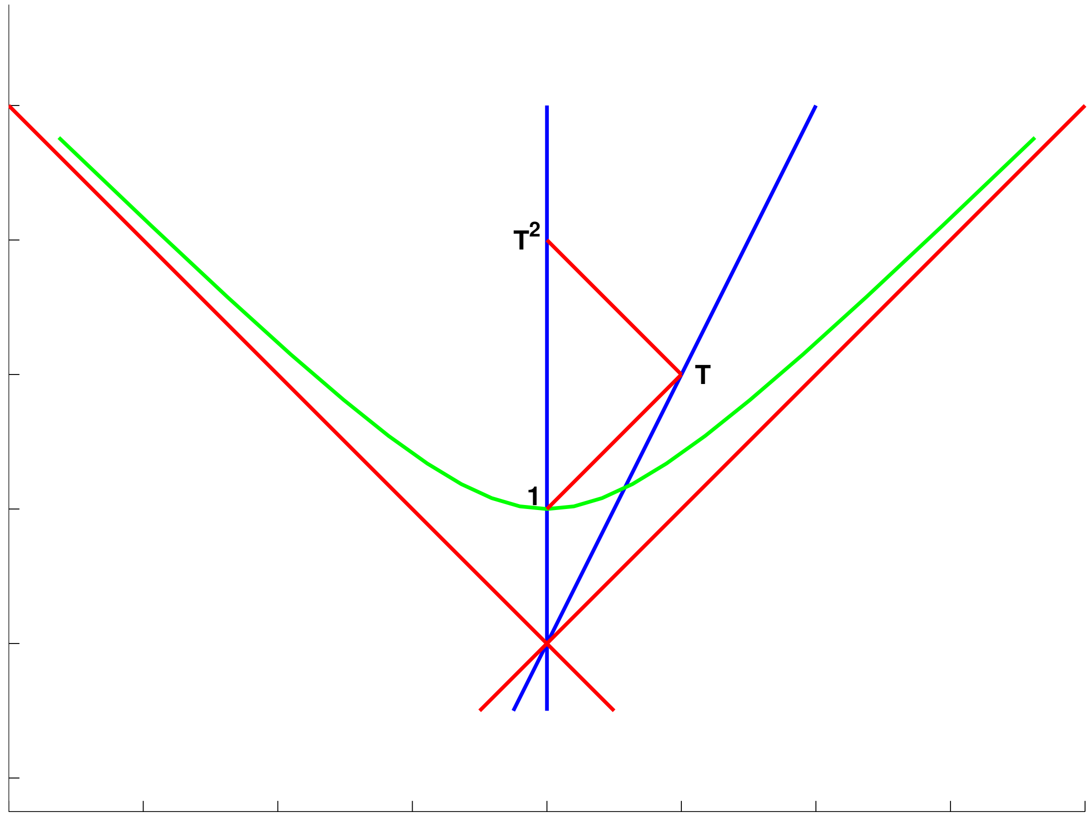
3.) Fliegen Photonen die Strecke s **im Feld der Erde nach oben, so verlieren sie (nach Pound und Rebkas Experiment) an kinetischer Energie**

$$\Delta E = m \cdot g \cdot s.$$

Daher ändert sich ihre Frequenz wie

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{\hbar} = \nu \cdot \frac{g \cdot s}{c^2}.$$

Die Zeit-Einheits-Punkte bestimmen die Minkowski Geometrie



1.) Weltlinie des von 1 ausgehenden Lichtsignals (rot): $\binom{0}{1} + \binom{1}{1} \cdot t$
Die von 0 ausgehende zweite Physiker-Weltlinie (blau): $\binom{a}{1} \cdot s$
Der Schnittpunkt der beiden (zum Zeitpunkt T) ist:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{a}{1-a} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-a}.$$

2.) Das zurücklaufende Signal (rot) kommt zum Zeitpunkt T^2 **an in**

$$\begin{pmatrix} 0 \\ T^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+a}{1-a} \end{pmatrix}, \ \textbf{also } T = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$

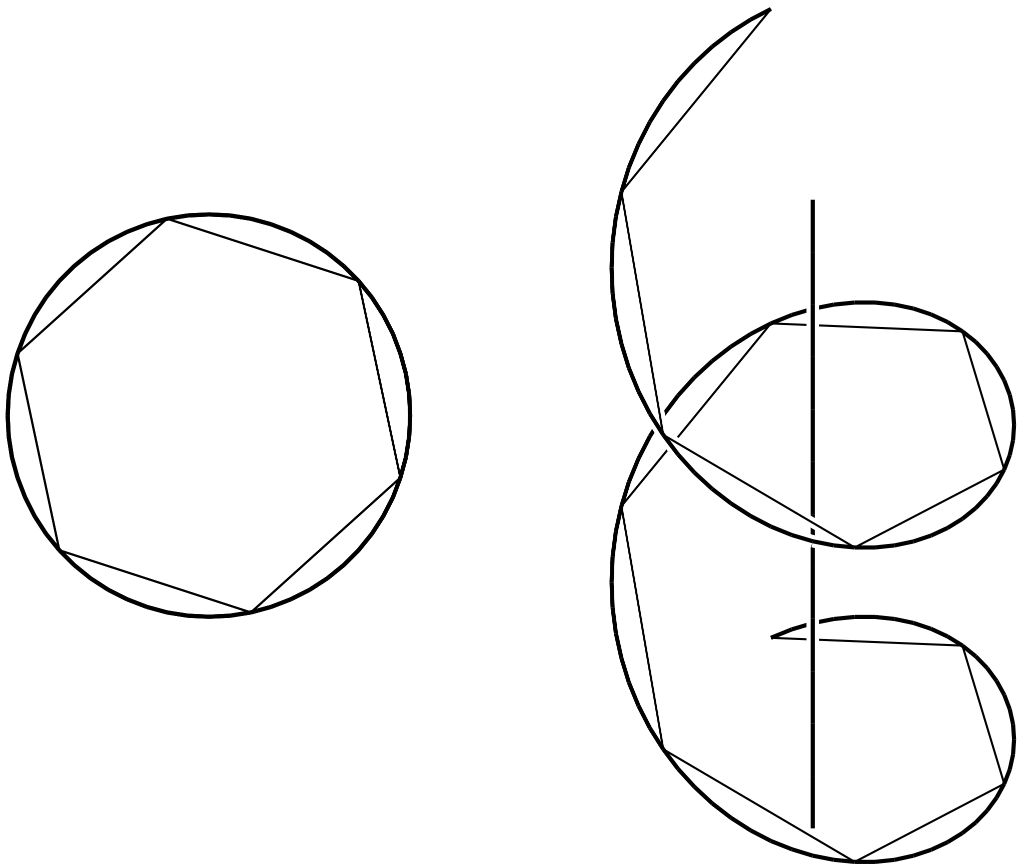
3.) Daher ist der Zeit-Einheits-Punkt auf der zweiten Weltlinie der Punkt

$$\frac{1}{T} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-a} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.) Alle Zeit-Einheits-Punkte $\binom{x}{t}$ **(grün) erfüllen also die Hyperbelgleichung**

$$t^2 - x^2 = 1.$$

Verstreichen von Zeit im Synchroton



Es ist ein mathematischer Satz, daß die Bogenlänge von glatten Kurven durch Approximation mit Polygonen bestimmt werden kann. Ebenso kann man die zeitartige Bogenlänge von Weltlinien durch Approximation mit (physikalisch unrealistischen) stückweise unbeschleunigten Weltlinien approximieren. Weil wir die Zeit-Einheits-Punkte auf jeder geraden Weltlinie kennen, vergeht auf der Beschleuniger-Weltlinie

$$\textbf{Schraubenlinie: } c(s) := \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \\ h \cdot s \end{pmatrix}, \qquad h > 1$$

die Zeit wie

$$T(s) = \sqrt{h^2 - 1} \cdot s,$$

während auf der Achse die größere Zeit $T_{Achse} = h \cdot s$ **vergeht.**

Man kann sich Zeit in der Relativitätstheorie wie eine Art Bogenlänge vorstellen.