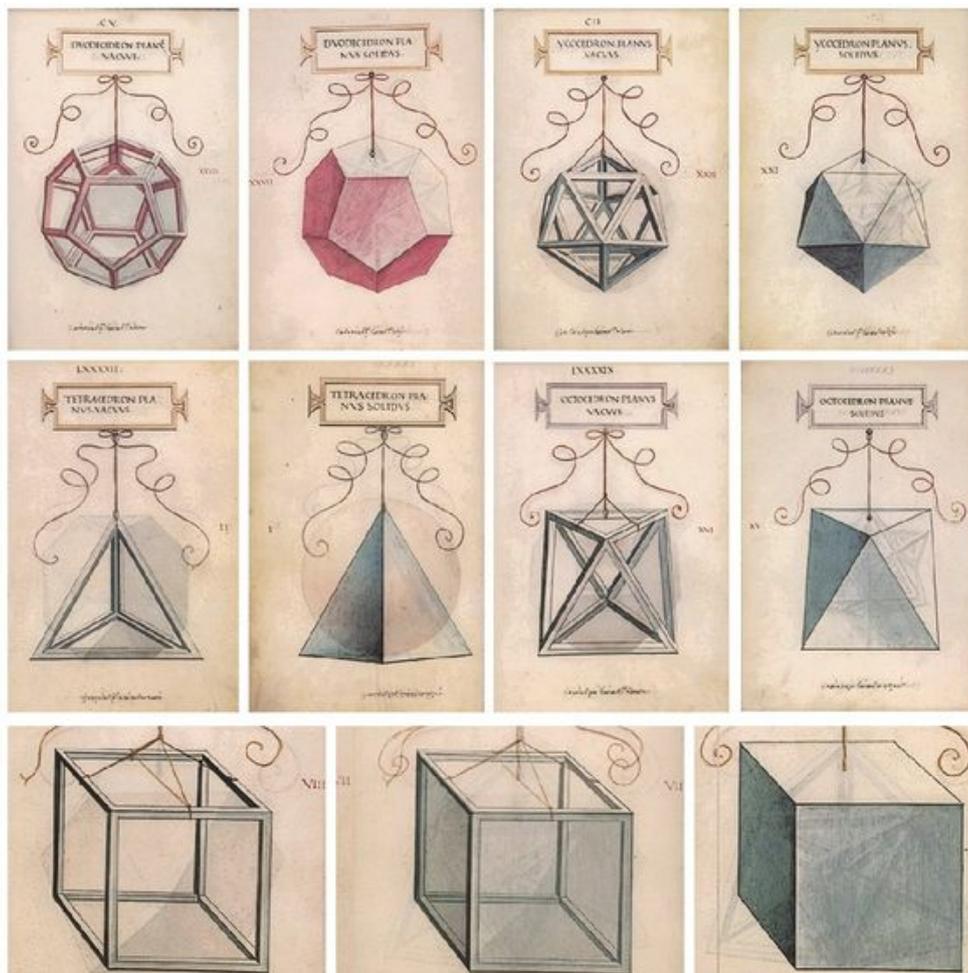


# Platonische Körper vom Würfel aus betrachtet

Ein Beispiel für das Interesse an den Platonischen Körpern:



Leonardo da Vinci (1452 - 1519) für ein Buch von Luca Pacioli

## Darstellung von Körpern in Parallelprojektion

Alle Sonnenlichtschatten auf ebenen Flächen sind Parallelprojektionen der Umgebung und umgekehrt können alle Parallelprojektionen als Schattenbilder interpretiert werden, falls die Gegenstände zwischen Lichtquelle und Bildebene stehen. Alle Ebenen, die parallel zur Bildebene sind, werden unverzerrt abgebildet.

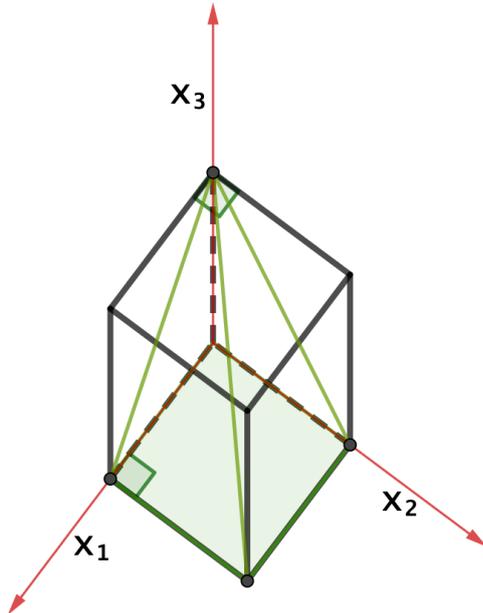


Fig.1 Militärperspektive

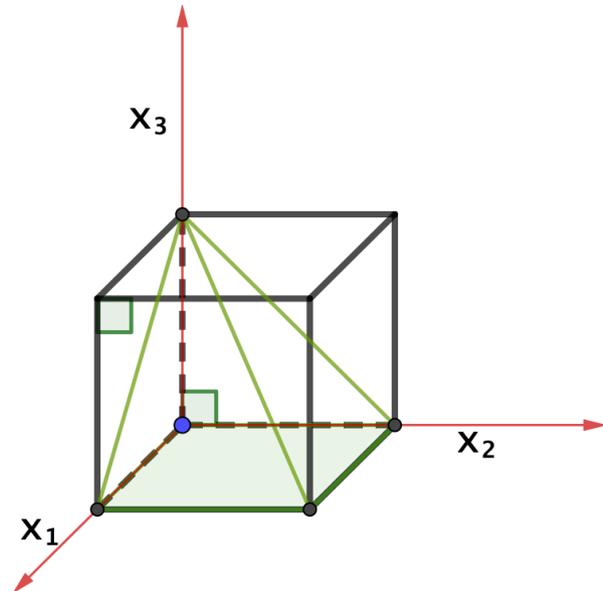


Fig.2 Kavalierverspektive

Die *Militärperspektive* wird bei der Darstellung von Objekten verwendet, bei denen es besonders auf den Grundriss ankommt. Deshalb ist die Bildebene die Grundriss-Ebene. Damit auch Höhen aus der Zeichnung abgelesen werden können, ist die Einheitsstrecke auf der  $x_3$ -Achse ebenso lang wie die der beiden anderen Achsen. Das führt dazu, dass Würfel in Richtung der  $x_3$ -Achse verlängert aussehen.

Die *Kavalierverspektive* liefert etwas anschaulichere Bilder. Sie wird deshalb am häufigsten zum Zeichnen verwendet. Da die Bildebene die  $x_2$ - $x_3$ -Ebenen ist, passt sie auch besonders gut zu an Wänden aufgehängten Bildern. – In beide Würfel ist grün die Puzzle-Pyramide aus S.4 gezeichnet, mit dem unteren Quadrat als Basis.

Die Bilder von Fotoapparaten oder die Bilder auf unserer Netzhaut sind keine Parallelprojektionen. Sie entstehen durch *Zentralprojektion* vom optischen Mittelpunkt der abbildenden Linse. Parallele Geraden haben meistens keine parallelen Bildgeraden, was oft an Bildern von in die Ferne laufenden Eisenbahngleisen veranschaulicht wird. Für Freihandzeichnungen dieser *perspektiven* Bilder ist Übung notwendig.

### Was für interessante Fragen kann man über Würfel stellen?

Kann man nicht alle Fragen einfach mit dem Satz des Pythagoras beantworten? Die Flächendiagonalen sind als Diagonalen in Quadraten  $\sqrt{2}$  mal so lang wie die Kanten. Die Raumdiagonalen sind Hypothenusen in rechtwinkligen Dreiecken, deren Katheten eine Würfelkante und eine Flächendiagonale sind. Daher sind sie  $\sqrt{3}$  mal so lang wie eine Kante. Die Diagonalen auf gegenüberliegenden Flächen sind entweder parallel

oder - wie man sagt - *windschief*. Den kürzesten Abstand zwischen ihnen liefert die Verbindungsstrecke der Flächenmittelpunkte (der gegenüberliegenden Flächen). Aber: *Wie groß ist der Abstand zwischen den Diagonalen benachbarter Flächen, also von zweien, die sich nicht in einer gemeinsamen Ecke treffen?* (Fig.3)

Ehe man über windschiefe Geraden nachdenkt, sollte man ein möglichst einfaches Bild von ihnen vor Augen haben. Für mich sind das

*nicht parallele Diagonalen auf gegenüber liegenden Seiten eines Quaders.*

Dies einfache Bild ist allgemein genug, weil man *jedes Paar* windschiefer Geraden  $g, h$  so ansehen kann: Man findet die parallelen Ebenen der gesuchten Quaderseiten einfach dadurch, dass man jede Gerade parallel verschiebt durch irgend einen Punkt der anderen Geraden! Das ist schon der unanschaulichste Teil, denn mit den Ebenen hat man auch die senkrechte Projektion  $Pr$  des Raumes z.B. auf die Ebene, in der  $g$  liegt. Dann ist  $S := g \cap Pr(h)$  der Mittelpunkt der Quaderseite, die  $g$  als Diagonale hat.  $S$  ist ein Endpunkt der kürzesten Verbindung (senkrecht zu den Ebenen!) zwischen Punkten von  $g$  und  $h$ . Wahl eines Punktes  $A \in g, A \neq S$  liefert den ersten Eckpunkt und die Größe des Quaders, die Quadersymmetrien die übrigen Ecken.

Zurück zum Beispiel, etwa die blaue Diagonale  $BE$  in der linken Seitenfläche und die rote Diagonale  $CF$  in der Vorderfläche. Um parallele Ebenen zu finden, in denen die beiden Diagonalen liegen, verschieben wir die blaue Diagonale in die rechte Seitenfläche. Dort spannt sie mit  $CF$  die Ebene auf, die den Würfel in dem roten Dreieck schneidet. Ebenso wird  $CF$  in die hintere Fläche verschoben und spannt dort mit  $BE$  die Ebene auf, die den Würfel in dem blauen Dreieck schneidet. Diese zwei Schnittebenen sind nach Konstruktion parallel, jede enthält eine der beiden Diagonalen  $BE, CF$  und sie sind auch senkrecht zu der grünen Raumdiagonalen. Die Schnittpunkte der beiden Ebenen mit dieser Raumdiagonalen liefern den *Abstand* der Ebenen und damit den der Diagonalen. Das *einfache Bild* ist fast erreicht.

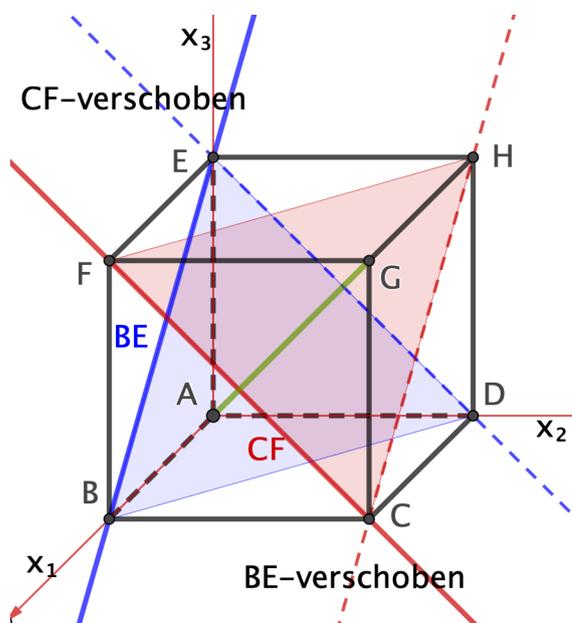


Fig.3 Windschiefe Diagonalen  $BE, CF$

Wer mit Koordinaten den Schwerpunkt  $P$  der Einheitspunkte  $E, B, D$  berechnen kann, nämlich  $P = (1|1|1)/3$ , der findet mit dieser Rechnung, dass die beiden Ebenen die Raumdiagonale in drei gleiche Teile teilen, sodass deren Abstand  $= 1/\sqrt{3}$  ist. Man kann diesen Abstand auch *sehen*, indem man den Würfel um die  $x_3$ -Achse um  $45^\circ$  dreht sodass die Raumdiagonale in die  $x_2$ - $x_3$ -Ebene (die Bildebene unserer Kavalierprojektion) zu liegen kommt. Die Bildebene ist Symmetrieebene des gedrehten Würfels, sie schneidet diesen in dem Rechteck  $ACGE$  (Bild nächste Seite).

Die rote Ebene geht durch den Mittelpunkt der oberen Würfel­fläche, die blaue Ebene durch den unteren. Deshalb sind die gezeichneten rote und blaue Geraden die Schnittgeraden dieser Ebenen mit der Bildebene. Sie treffen die Raumdiagonale in den Schwerpunkten  $P, Q$  der beiden Dreiecke. Nach dem Strahlensatz teilen sie die Raumdiagonale mit den Punkten  $P, Q$  in drei gleiche Teile:  $|PQ| = |QG|$  in dem Dreieck  $EPG$  und  $|AP| = |PQ|$  in dem Dreieck  $ACQ$ . Der Abstand der beiden windschiefen Diagonalen  $BE$  und  $CF$  ist gleich dem Abstand ihrer parallelen Ebenen, also gleich  $|PQ|$  und damit gleich einem Drittel der Länge der Raumdiagonale.

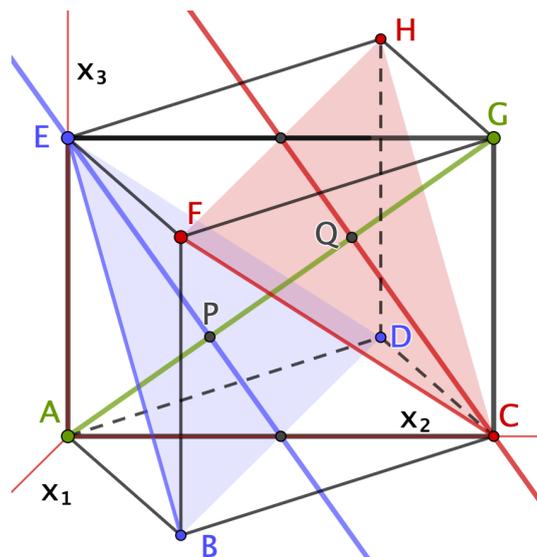


Fig.4 Symmetrieebene gedreht

Um auch noch das gemeinsame Lot der beiden Diagonalen zu *sehen*, muss der Würfel noch so gedreht werden, dass die grüne Raumdiagonale senkrecht auf der Bildebene steht,  $G$  oben. Dann wird *senkrecht* projiziert, Fig.5:

Das rote Schnittdreieck  $FCH$  liegt oberhalb des blauen Schnittdreiecks  $EBD$  und beide sind parallel zur Zeichenebene. Ihre Seiten teilen sich gegenseitig in *drei gleiche Teile*. Das gemeinsame Lot der beiden Diagonalen  $CF$  und  $BE$  hat also seine beiden Endpunkte jeweils nach einem *Drittel* jeder Gesamtdiagonale (markierter Punkt und Umriss eines möglichen Quaders).

Die Projektion zeigt weiter, dass die Ebene senkrecht zur Raumdiagonale und durch deren Mittelpunkt den Würfel in einem *regulären Sechseck* (grün) schneidet. Die Ecken dieses ebenen Sechsecks sind die Mittelpunkte der (nicht horizontalen) Kanten, die das Umriss-Sechseck  $EFBCDH$  bilden.

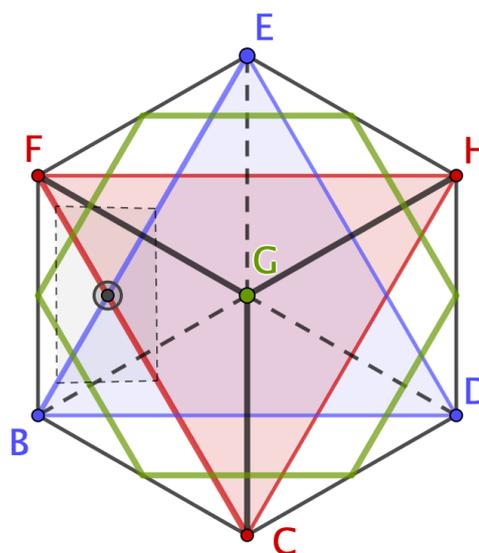


Fig.5 Orthogonalprojektion

Schneidet man den Würfel in den Dreiecken  $AGH, AGF$  und  $AGC$ , so zerfällt er in *drei kongruente Pyramiden*, von denen eine in die Militär- und die Kavalierperspektive (Fig.1, 2) gezeichnet ist. Die drei Pyramiden sehen so schief aus, dass es ein überraschend schwieriges *Puzzle* ist, aus ihnen den Würfel wieder zusammenzusetzen. Ich hatte solche Puzzle­teile in der Hand. – Einfacher ist es, den Würfel vom Mittelpunkt aus in sechs quadratische Pyramiden halber Würfelhöhe zu zerschneiden (und wieder zusammenzusetzen). Beide Zerschneidungen illustrieren die Volumenformel  $Grundfläche \times \frac{1}{3}Höhe$  ohne Grenzwerte.

Und eine Überraschung:

### Prince Rupert's Cube (Wikipedia)

Gegen 1690 hat *Prince Rupert of the Rhine* gewettet, dass man durch einen Würfel ein so großes Loch bohren könne, dass ein gleich großer Würfel hindurch geschoben werden könne. Der Mathematiker John Wallis half ihm, diese Wette zu gewinnen.

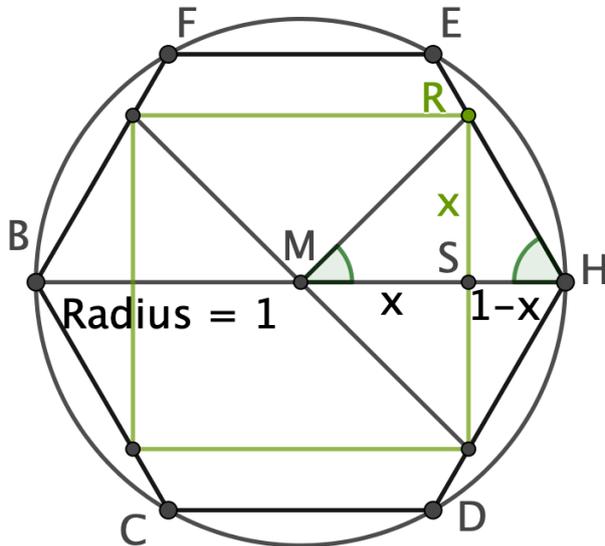


Fig.6 Orthogonalprojektion des Würfels  
Raumdiagonale  $AG$  senkrecht zur Bildebene  
Möglichst großes Quadrat (grün) im Umriss,  
der den Würfelschatten berandet.

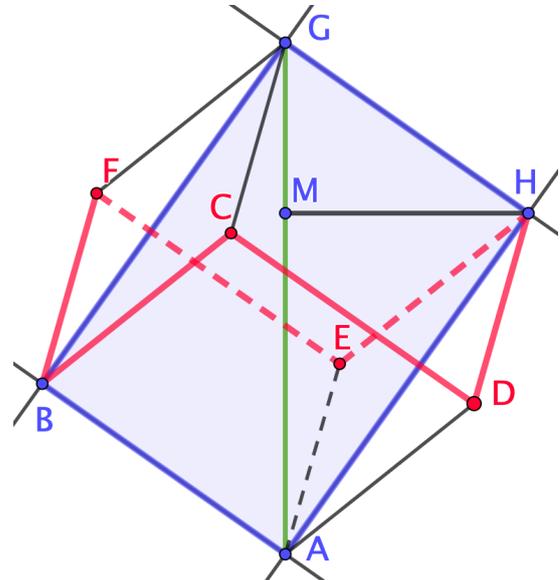


Fig.7 Schrägbild des Würfels  
Ebene  $GHAB$  gleich Bildebene  
Länge  $MH$  wie in Fig.6  
Umriss Sechseck  $HEFBCD$  rot.

Um ein möglichst großes quadratisches Loch in Richtung der Raumdiagonale zu bohren, muss man in das Umriss Sechseck  $EFBCDH$  ein möglichst großes Quadrat legen. Betrachte dazu in Fig. 6 das Dreieck  $MHR$ , mit Winkel  $45^\circ$  bei  $M$  und Winkel  $60^\circ$  bei  $H$ . Wir rechnen mit  $|MH| = 1$  und skalieren später. Die Höhe  $|RS|$  ist die halbe Kantenlänge des grünen Quadrates. Setze  $x = |RS| = |MS|$ . Dann folgt mit  $|SH| = (1 - x)$ , weil  $RSH$  ein halbes gleichseitiges Dreieck ist:  $x = (1 - x) \cdot \sqrt{3}$ , also  $x = \sqrt{3}/(1 + \sqrt{3})$ .

In Fig. 6 sind zwar alle zwölf Kanten des Würfels gleich lang, aber sie sind verkürzt, weil sie nicht parallel zur Bildebene sind. Fig. 7 zeigt ein Schrägbild, in dem die Symmetrieebene  $GHAB$  parallel zur Bildebene ist, sodass sowohl die Kante  $GH$  wie ihre in Fig. 6 sichtbare Projektion  $MH$  in wahrer Größe abgebildet werden. Das Dreieck  $GHA$  besteht aus Raumdiagonale, Flächendiagonale und Kante des Würfels. Seine Seiten und die des ähnlichen Dreiecks  $GMH$  verhalten sich daher wie  $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$ . Insbesondere gilt:  $|GH| = \sqrt{3/2} \cdot |MH|$ . Das Verhältnis *Lochkante* : *Würfelkante* ist also gleich  $2x : \sqrt{3/2}|MH| = 2\sqrt{2} : (1 + \sqrt{3}) \approx 1,035 > 1$ . Der Spielraum ist zwar nicht groß, aber er genügt, um das gewünschte Loch zu bohren, ohne das Umriss Sechseck zu berühren. (Fig.6 gibt nicht den größten Würfelschatten)

## Das Tetraeder – muss man alles rechnen?

Wenn man ein Tetraeder vor sich stehen hat mit seinen vier gleichseitigen Dreiecken, dann sieht es nach viel Rechnung aus, z.B. den Abstand gegenüber liegender Kanten zu bestimmen. Zum Glück ist das Tetraeder viel näher mit dem Würfel verwandt, als das erste Erscheinungsbild vermuten läßt: Auf zwei gegenüberliegenden Würfelseiten beginnt man mit zwei nicht parallelen Diagonalen  $AC, FH$ . Mit vier weiteren Flächendiagonalen vervollständigt man, so dass man einen *Tetraeder* sogar leicht *freihändig* zeichnen kann. – Dann sieht man ohne Rechnung, dass die beiden ersten Diagonalen die Länge einer Würfelkante als ihren *Abstand* haben. – Die abgeschnittenen Würfelecken sind Pyramiden mit einem halben Quadrat als Grundfläche und einer Würfelkante als Höhe. Ihr Volumen (*Grundfläche mal  $\frac{1}{3}$  Höhe*) ist also ein Sechstel des Würfels, sodass sich ohne Rechnung ergibt:

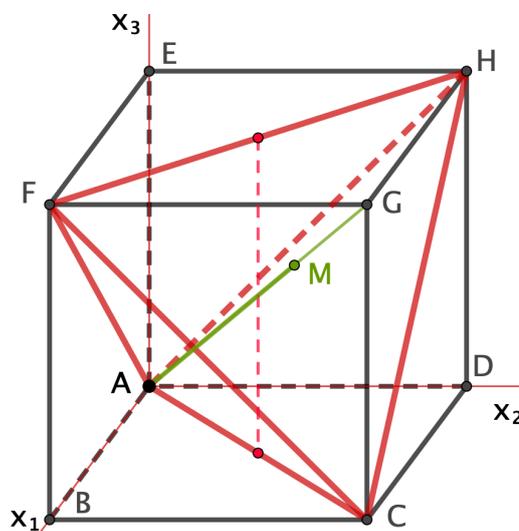


Fig.8 Tetraeder im Würfel

*Tetraedervolumen = ein Drittel Würfelvolumen.*

Die Raumdiagonale  $AG$  steht senkrecht auf der Tetraederfläche  $FCH$  und trifft sie im Punkt  $M$ . Vom Würfel her wissen wir daher schon (Fig. 3, 4):

*Tetraederhöhe = zwei Drittel der Raumdiagonale.*

Die Symmetrieebene durch die Mittelpunkte  $M_j$  der vertikalen Würfelflächen schneidet das Tetraeder in dem Quadrat  $M_1...M_4$ . Auch das gibt ein überraschendes Puzzle.

Würfel und Tetraeder haben dieselbe Umkugel um den Mittelpunkt  $O$  der Raumdiagonale  $AG$ .  $O$  hat von der Tetraederfläche  $FCH$  den Abstand  $|OM| = \frac{1}{6}|AG|$ . Die Tetraederhöhe ist  $|AM| = \frac{2}{3}|AG|$  und daher  $|OM| = \frac{1}{4}|AM| = \frac{1}{3}|AO|$ . Der Radius der Inkugel ist  $R_i := |OM| = \frac{1}{3}R_u$ , denn Inkugel und Umkugel Platonischer Körper haben denselben Mittelpunkt. All dies hat sich ohne neue Rechnungen ergeben, es hat sich gelohnt, den Würfel so genau anzusehen. Wir stellen zum Schluss noch

*Prince Rupert's Frage für das Tetraeder.*

Das Loch wird senkrecht zu einer Seitenfläche  $ACF$  gebohrt, sodass nur ein schmaler Rand stehen bleibt. Das auf dieser Fläche stehende blaue Tetraeder wird um die Kante  $AF$  um den halben Diederwinkel in die rote Position gedreht. Dabei wird die  $AF$  gegenüberliegende Kante senkrecht zur Standebene (sichtbar nur als  $E$ ). Eine weitere Drehung um  $DE$  läßt diese senkrechte Kante sichtbar werden (grün) und: Das Bild von  $AF$  wird *verkürzt*.

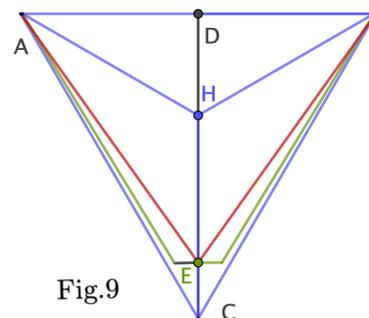


Fig.9

Leider so *wenig*, dass zwar Ruperts Frage bejaht, aber die Verkürzung in der Zeichnung nicht sichtbar wird (und ein stabiles Modell kann auch nicht gebaut werden).

## Das Oktaeder – mit denselben Symmetrien wie der Würfel.

Das Oktaeder entsteht, indem auch die anderen vier Würfecken abgeschnitten werden oder indem von dem Tetraeder mit Schnitten durch die Mittelpunkte seiner Kanten alle vier Ecken als *halbo große* Tetraeder abgeschnitten werden. Diese Beschreibung zeigt: Das *Oktaedervolumen ist halbo groß wie das des Tetraeders und damit ein Sechstel des Würfelvolumens*. Jede Raumdiagonale des Würfels trifft gegenüber liegender Oktaederflächen senkrecht, sodass deren *Abstand gleich einem Drittel der Länge der Raumdiagonale ist*. Je zwei *windschiefe Oktaederkanten* liegen auf gegenüber liegenden Oktaederflächen, sodass ihr Abstand ebenfalls ein Drittel der Raumdiagonale des Würfels ist.

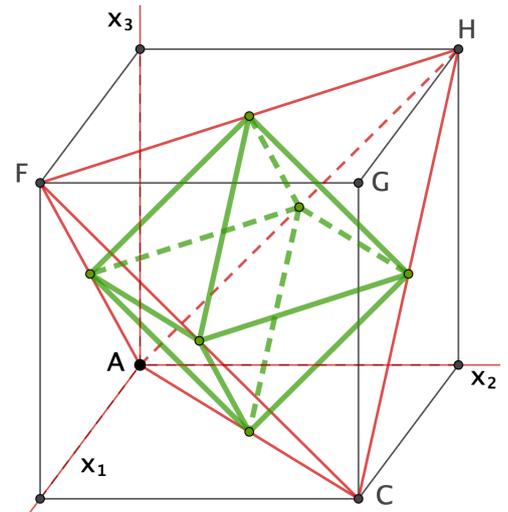


Fig.10 Oktaeder im Würfel

Der *Inkugelradius* des Oktaeders ist derselbe wie der des Tetraeders (ein Sechstel der Raumdiagonale) und der *Umkugelradius* hat die Länge einer halben Würfelskante. Mit quadratischen Pyramiden, deren Seitenflächen unter  $45^\circ$  ansteigen, kann man den Raum pflastern – z.B. setzen sich sechs Stück zu einem Würfel zusammen. Die Seitenflächen des Oktaeders sind etwas steiler, weil die Diagonalen des Oktaeders um den Faktor  $\sqrt{2}$  *länger* sind als seine Kanten, das gibt  $\tan(\text{Anstiegswinkel}) = \sqrt{2} \approx \tan(54,7^\circ)$ . Wir schließen wieder mit

*Prince Rupert's Frage für das Oktaeder.*

Das Loch wird parallel zu einer Diagonale gebohrt, so dass nur ein dünner Rand um die Kanten eines Quadrates bleibt (grüne Position). Dann wird das Oktaeder um die Diagonale  $AC$  um  $45^\circ$  in die blaue Position gedreht, in der es das grüne Quadrat nur noch in  $A$  und  $C$  berührt. Schließlich wird es um die Achse  $BD$  um  $9,6^\circ$  in die rote Position gedreht. Die ursprüngliche Diagonale  $AC$  wird dabei um den Faktor  $\cos(9,6^\circ) \approx 0,986$  verkürzt. Das genügt, um das rote Oktaeder mit Spielraum durch das grüne Quadrat zu schieben. Leider ist der Spielraum wieder so klein, dass er in der Zeichnung nicht zu sehen ist.

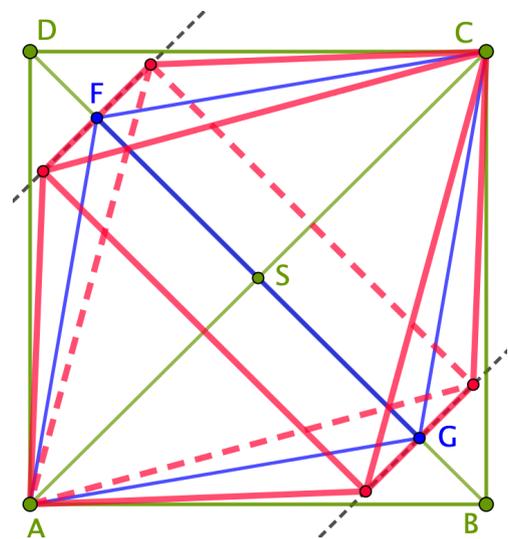


Fig.11 Oktaeder durch Quadrat

## Das Ikosaeder – kann man es freihändig zeichnen?

Die enge Beziehung zum Würfel ist eine große Hilfe, man beginnt wie in Fig. 2. Dann wird auf jeder Würfel­fläche auf eine Symmetrielinie eine Strecke (grün) gezeichnet, die um einen Faktor  $a$  kürzer als die Würfelkante ist. Die 12 Endpunkte dieser Strecken sind die Ecken eines Polyeders, das von 20 Dreiecken berandet wird. 8 von diesen Dreiecken (farbig) sind wegen der Wahl der grünen Strecken *gleichseitig*, die übrigen 12 sind *gleichschenkelig* mit einer grünen Strecke als Basis. Diese können durch Wahl von  $a$  ebenfalls gleichseitig gemacht werden: Man erhält das Ikosaeder. Wie groß ist  $a$ ?

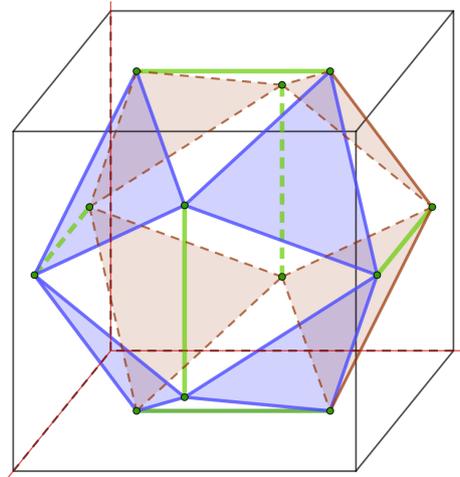


Fig.12 Ikosaederkonstruktion

Zum Rechnen stellen wir uns die Würfecken mit den Koordinaten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  vor. Die Endpunkte der grünen Strecken sind dann  $(\pm a, \pm 1, 0)$  in den Seitenebenen,  $(0, \pm a, \pm 1)$  oben und unten, sowie  $(\pm 1, 0, \pm a)$  vorn und hinten. Die grünen Kanten haben die Länge  $2a$ , die übrigen haben die Länge  $\sqrt{1^2 + a^2 + (1-a)^2}$ . Gleichheit dieser Längen gibt  $4a^2 = 2 - 2a + 2a^2$  oder  $a^2 + a - 1 = 0$ .

$a = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618$  ist das berühmte Verhältnis des *goldenen Schnittes*.

Die *Umkugel* geht durch die Endpunkte aller grünen Strecken, ihr Radius ist also  $R_u = \sqrt{(1+a)^2}$ . Die *Inkugel* berührt die farbigen Dreiecke in deren Schwerpunkten, z.B. in  $(1+a, 1+a, 1+a)/3$ , ihr Radius ist also  $R_i = (1+a)/\sqrt{3}$ ,  $R_u : R_i \approx 1,26$ . Manchmal interessiert der Winkel zwischen benachbarten Dreiecken, genannt *Diederwinkel*  $\delta$ . Aus dem rechtwinkligen Dreieck *Würfelmittelpunkt–Kantenmittelpunkt–Dreiecksmittelpunkt* kann man ablesen  $\sin(\delta/2) = R_i : 1 \approx 0,934 \approx \sin(138,2^\circ/2)$ .

### Beziehung zum Sternikosaeder

Interessant ist auch, dass die von einer Ecke ausgehenden Kanten in einem *ebenen regulären Fünfeck* enden. Verlängert man die Kanten dieser Fünfecke wie in nebenstehendem Bild zu einem Stern, so setzen sich die Spitzen dieser Sterne über den benachbarten Ikosaederdreiecken zu dreiseitigen Pyramiden zusammen und man erhält das *Sternikosaeder* auf der nächsten Seite. – Man kann sich das Sternikosaeder auch so vorstellen, dass es aus 12 dieser Fünfecksterne gebildet wird, die sich längs der blauen Kanten in Fig. 13 durchdringen.

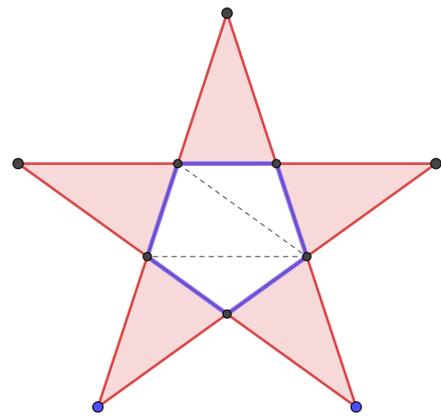


Fig.13 Stern um Fünfeck

Der Winkel an den Spitzen der Sterne ist  $36^\circ$ , das Verhältnis von Basis zu Schenkellänge (in den gleichschenkligen Spitzen) ist wieder der goldene Schnitt  $(\sqrt{5} - 1)/2$ , weil die gefärbten Sternspitzen kongruent zu dem punktierten Dreieck sind.

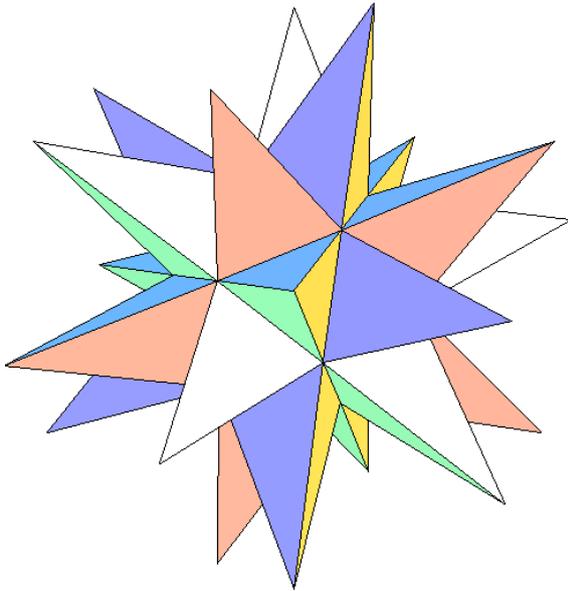


Fig.14 Iksaederstern, gleich gefärbte Dreiecke liegen in einer Ebene.

Angesprochen werden muss auch die Beziehung des Iksaeders zu einer berühmten kulturellen Figur, den **Borromäischen Ringen** (Wikipedia):

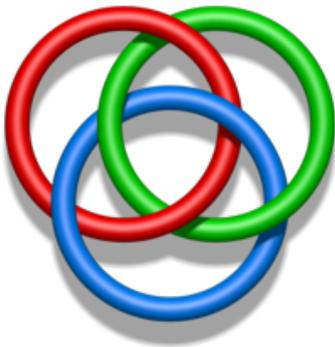
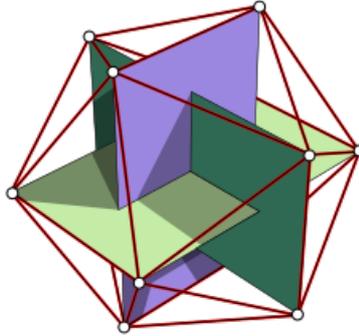


Fig.15 Standard Ringe



Link mit Iksaeder



Norwegen 7. Jahrhundert

Diese paarweise *un*verschlungenen, aber zu dritt verlinkten Kurven kommen in sehr vielen Kulturen vor. Die aus gegenüberliegenden Iksaederkanten erzeugten Rechtecke haben den goldenen Schnitt als Seitenverhältnis und sind *borromäisch verlinkt*. Schneidet man von solch einem Rechteck ein Quadrat ab, so bleibt ein *ähnliches Rechteck* übrig:

Das Bild ist auch ein geometrischer Beweis für die Irrationalität des goldenen Schnittes, denn Rechtecke mit rationalem Seitenverhältnis  $p : q$ , lassen sich mit  $p \cdot q$  kleinen Quadraten pflastern. Wäre das Rechteck  $ABCD$  mit kleinen Quadraten gepflastert, so wäre  $FCDE$  mit *weniger aber gleich großen* Quadraten gepflastert. Dieses Wegnehmen von Quadraten hin zu kleineren goldenen Rechtecken kann fortgesetzt werden, bis die Größe der (angeblich) pflasternden Quadrate unterschritten ist.

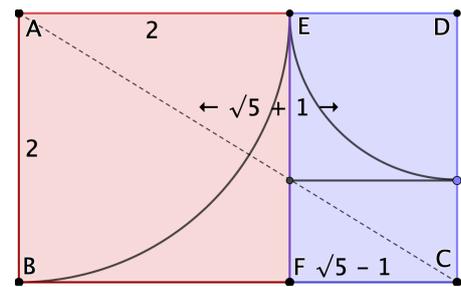


Fig.16 Goldenes Rechteck  $(\sqrt{5} + 1) : 2 = 2 : (\sqrt{5} - 1)$

## Steinzeit Ikosaeder?

Im weiteren Umkreis von Edinburgh sind etwa 400 knapp 5000 Jahre alte verzierte Steinkugeln gefunden worden. Mehr als die Hälfte hat Würfelsymmetrie. Das Ashmolean Museum besitzt die abgebildete Kugel mit Ikosaedersymmetrie. Ich füge ein Foto hinzu, das zeigt, dass man ohne Mathematik mit Lehmkugeln eine Figur mit Ikosaedersymmetrie erzeugen kann.



Fig.17 Ashmolean Museum 3000 AD



Fig.18 Halber Ikosaeder aus Kugeln

## Das Dodekaeder – Konstruktion mit Walmdächern

Erstens: Nimmt man die *Flächenmitten eines Ikosaeders* als neue Eckpunkte, so erhält man ein Dodekaeder. Zweitens: Man versteht das Dodekaeder etwas besser, wenn man es direkt aus dem Würfel konstruiert:

### Walmdach Konstruktion

Walmdächer haben kürzere Firste als Traufen. Auf jeder Würfel­fläche sitzt ein Walmdach. Die Traufen sind so lang wie die Würfelkanten (= 2). Die Firste sind um den Faktor  $a$  kürzer. Die Höhe des Firstes über der Würfel­fläche ist  $h$ . Es entsteht ein von 12 Fünfecken berandeter Körper. Das rote Fünfeck zeigt, dass das Giebelteil des oberen Daches nur dann *ohne Knick* in die Traufen­fläche des rechten Daches übergeht, wenn gilt  $h : (1 - a) = 1 : h$ . In jedem Fünfeck hat eine Kante die Länge  $2a$ , die übrigen haben die Länge  $\sqrt{1^2 + h^2 + (1 - a)^2} = \sqrt{3 - 3a + a^2}$ .

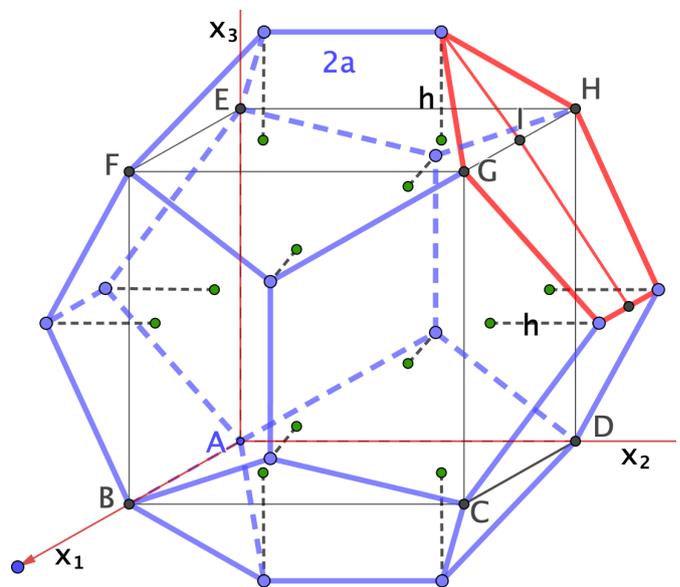


Fig.19 Dodekaeder um Würfel

Alle Kanten sind also gleich lang, wenn wie beim Ikosaeder gilt  $a^2 = 1 - a = h^2$ . Auch

die Endpunkte der Firste liegen auf der Umkugel des Würfels vom Radius  $R_u = \sqrt{3}$ , denn  $(1+h)^2 + a^2 = 1 + 2a + 2a^2 = 3$ . Die Ecken eines Fünfecks liegen also auf einem *Kreis*, dem Schnitt der Fünfeck-Ebene mit der Kugel. Wegen der gleich langen Kanten sind die Sehnen-Fünfecke regulär. Die Inkugel berührt das rote Fünfeck im Schwerpunkt  $(0|4+2h+a|3+h)/5$ , also  $R_i^2 = ((5+3\sqrt{5})^2 + (5+\sqrt{5})^2)/100$ , vereinfacht zu: Inkugelradius  $R_i^2 = 1 + 2/\sqrt{5}$ .

Man kann beinahe mit Dodekaedern den Raum pflastern, der Diederwinkel  $\delta$  ist nur ein wenig zu klein. In der Symmetrieebene senkrecht zur Kante  $GH$  liest man ab  $\tan(\delta/2) = (h+1) : (1-a+h) = a+1 = (\sqrt{5}+1)/2 \approx \tan(116,565^\circ/2)$ .

### Sterndodekaeder

Verlängert man die von einem Fünfeck ausgehenden Kanten über das Fünfeck hinaus, so entstehen über den benachbarten Dodekaederflächen fünfseitige Pyramiden. Die einer Pyramide zugewandten Nachbarflächen liegen wie beim Iksaederstern in einer Ebene, der des ursprünglichen Dodekaederfünfecks. Deshalb kann man sich auch den Dodekaederstern so vorstellen, als sei er aus 12 Sternen wie in Fig. 13 gemacht, die sich längs der Fünfeckkanten durchdringen, um so das *Sterndodekaeder* zu bilden.

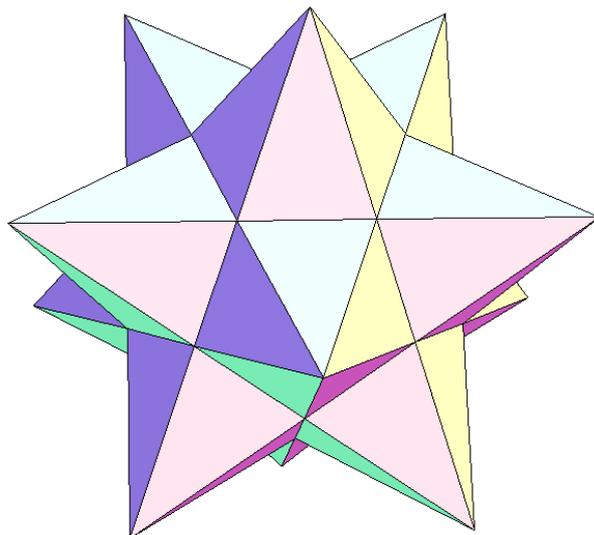
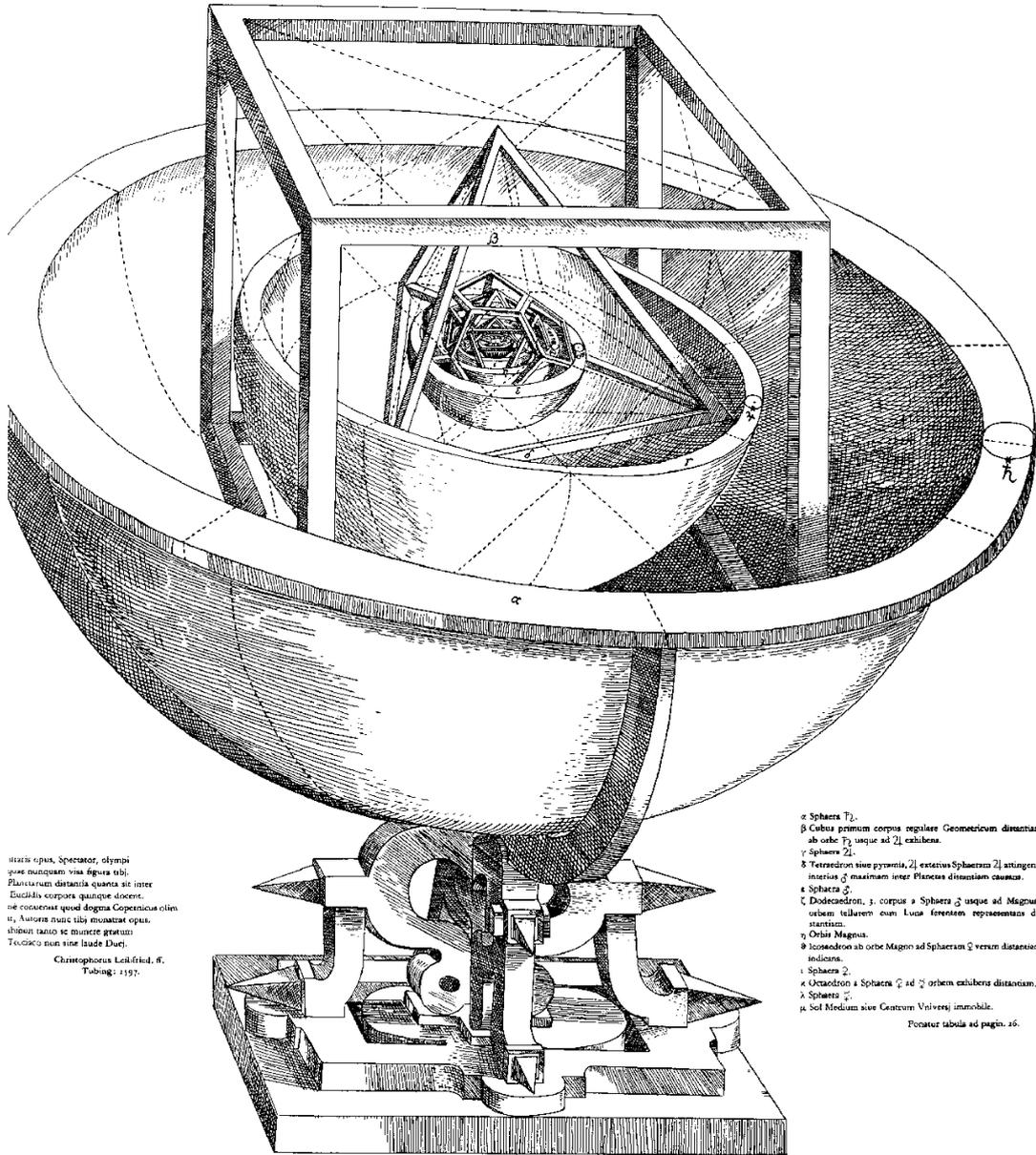


Fig.20 Dodekaederstern, gleich gefärbte Dreiecke liegen in einer Ebene

Der Irrationalitätsbeweis für den goldenen Schnitt ist aus historischen Gründen hinzugefügt: Der Stern aus Fig.13, auch Pentagramm oder Drudenfuß genannt, ist nicht nur eng mit Ikosaeder und Dodekaeder verbunden, er war auch Erkennungszeichen der Pythagoreer. Es war eine Katastrophe für deren auf ganzzahlige Verhältnisse gegründete Philosophie, als ihr Schüler *Hippasos von Metapont* das Verhältnis von Basis zu Schenkellänge der farbigen Dreiecke in Fig.13 als *irrational* nachwies.

Kepler hat beobachtet, dass die Verhältnisse aus Umkugelradius zu Inkugelradius der Platonischen Körper ziemlich gut mit den Abstandsverhältnissen der Planeten zusammenpassen. Das erklärt er mit folgendem Bild (nächste Seite). Auf die Kugelschalen sind die Symbole für die Planeten geschrieben. Zwischen Jupiter und Mars liegt der Asteroidengürtel, das Bahnradienverhältnis ist dort besonders groß und gehört daher zum Tetraeder.

TABELLA III.  
ORBIVM PLANETARVM DIMENSIONES, ET DISTANTIAS PER QVINQVE REGVLARIA CORPORA GEOMETRICA EXHIBENS.



Itaque opus, Spectator, olympi  
sese nunquam visa figura tibi;  
Plancturum distantia quarta sit inter  
Ducit illa corpora quinque docent,  
ne conueniat quod dogma Copernicus olim  
ei, Naturae tuus tibi monstrat opus,  
tibi aut ratio se mouere gratum  
Te, cetera non sine iude Duce.  
Christophorus Leibfried, ff.  
Tubing: 1597.

- a Sphaera  $T_2$ .
  - b Cubus primum corpus regulare Geometricum distantiam  
ab orbis  $T_2$  usque ad  $T_1$  exhibens.
  - c Sphaera  $T_1$ .
  - d Tetraedron sive pyramis,  $T_1$  exteriori Sphaerae  $T_2$  attingens,  
interius  $d$  maximam inter Planctus distantiam causans.
  - e Sphaera  $T_3$ .
  - f Dodecaedron,  $T_3$  corpus a Sphaera  $T_2$  usque ad Magnam  
orbem tellurem cum Luna forestem representans di-  
stantiam.
  - g Orbis Magnus.
  - h Icosaedron ab orbis Magni ad Sphaeram  $T_1$  verum distantiam  
indicans.
  - i Sphaera  $T_4$ .
  - k Octaedron a Sphaera  $T_3$  ad  $T_4$  orbem exhibens distantiam.
  - l Sphaera  $T_4$ .
  - m Sol Medium sive Centrum Universi immobile.
- Peratuz tabula ad pagin. 16.

Fig.21 Keplers Mysterium Cosmographicum