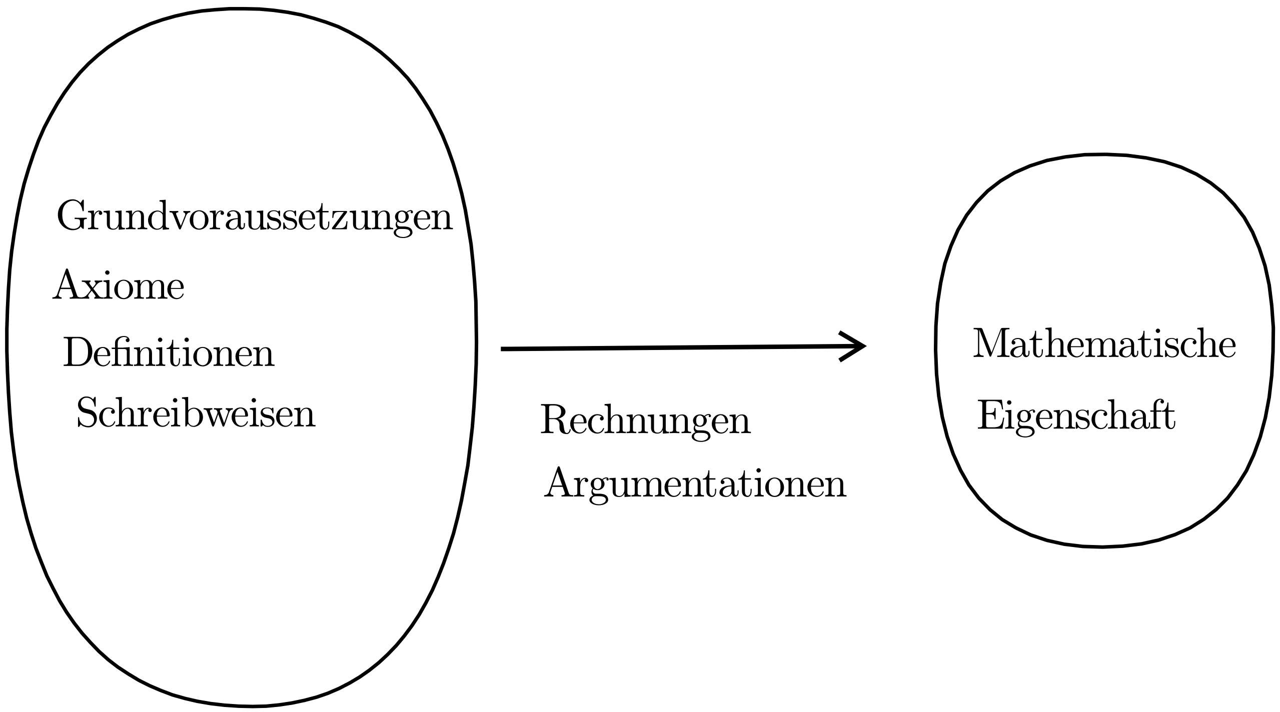
# Faszination Mathematik: Mathematisches Beweisen

Peter Koepke, Mathematisches Institut, Universität Bonn

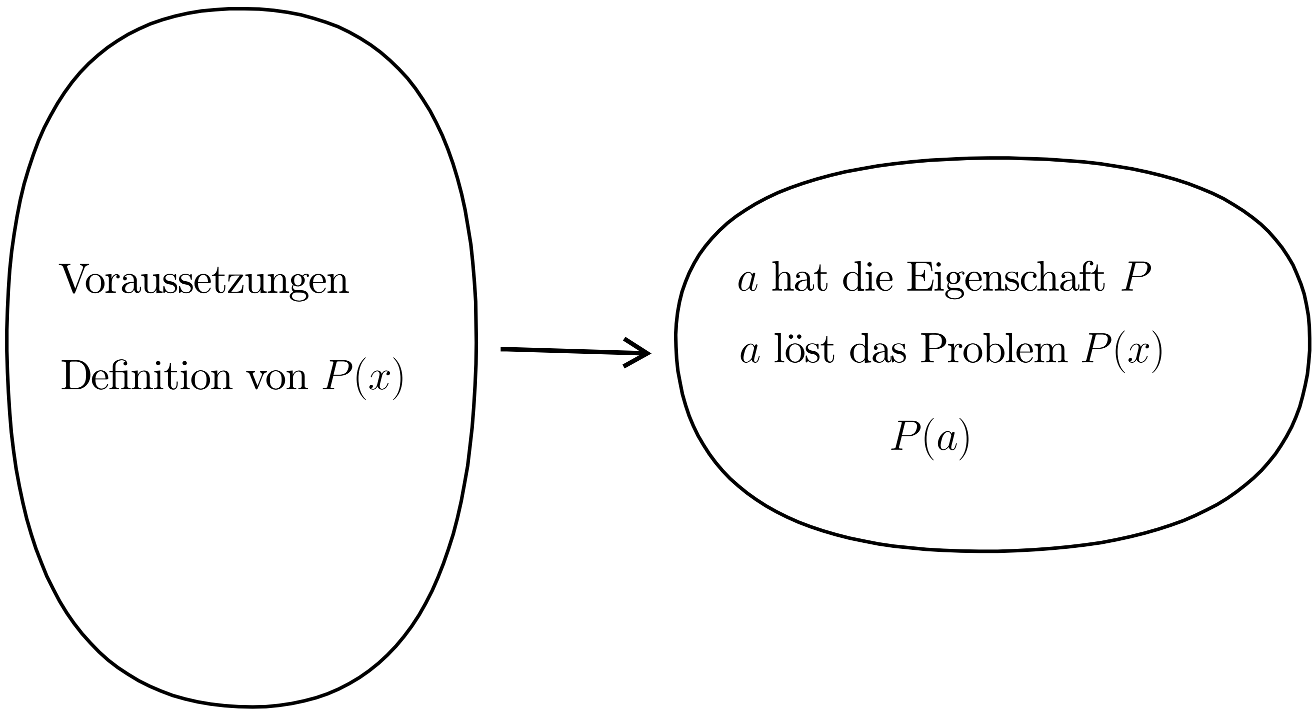
Schülerinnen- und Schülertag, Hausdorff Center, Bonn, 16. Mai 2008

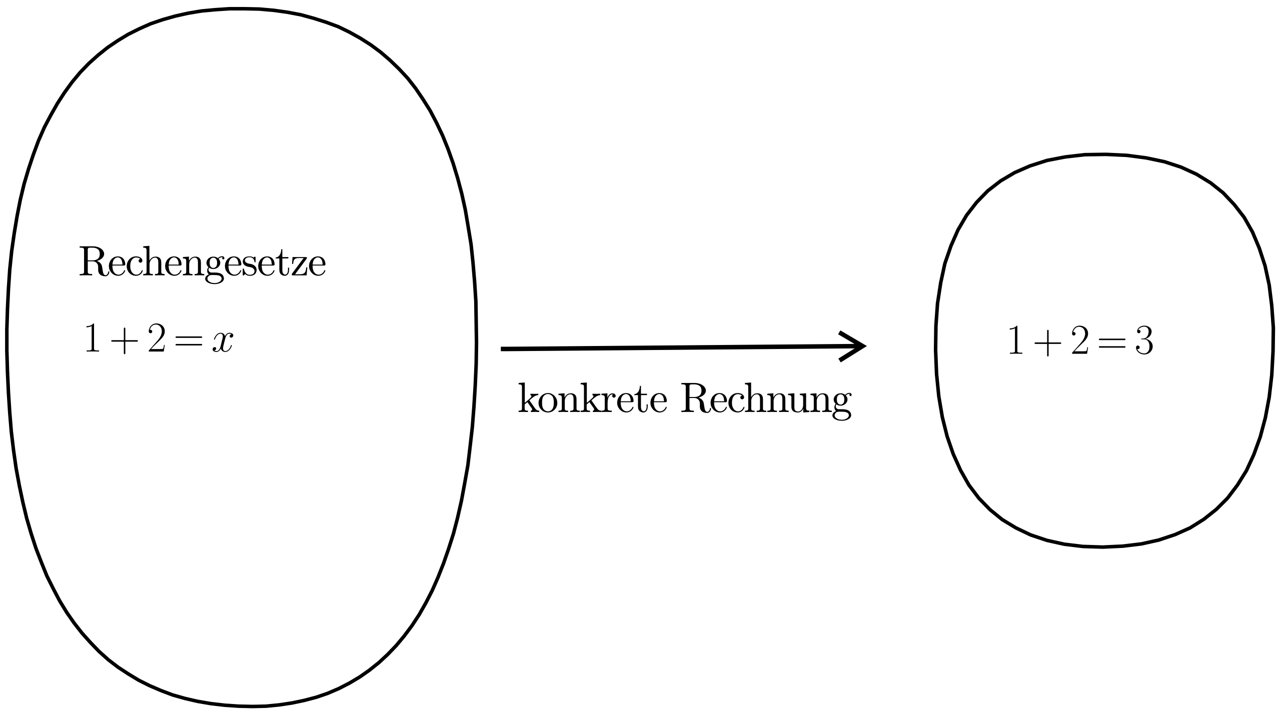
Faszination Mathematik

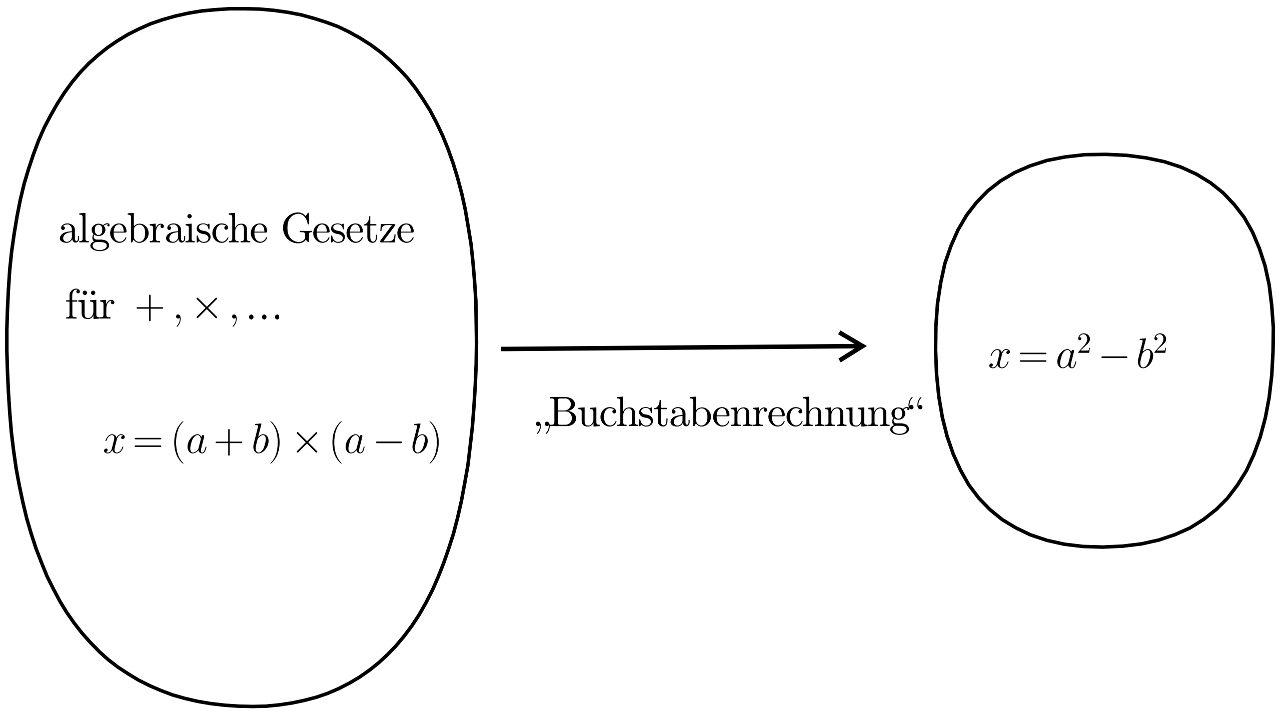
- .....
- Absolute Exaktheit und Allgemeingültigkeit mathematischer Resultate, unabhängig von historischen, sozialen und materiellen Umständen
- mathematische Sprache, Formelsprache
- einzige und allgemeine Methode zur Rechtfertigung von Resultaten: Berechnungen und Beweise
- .....

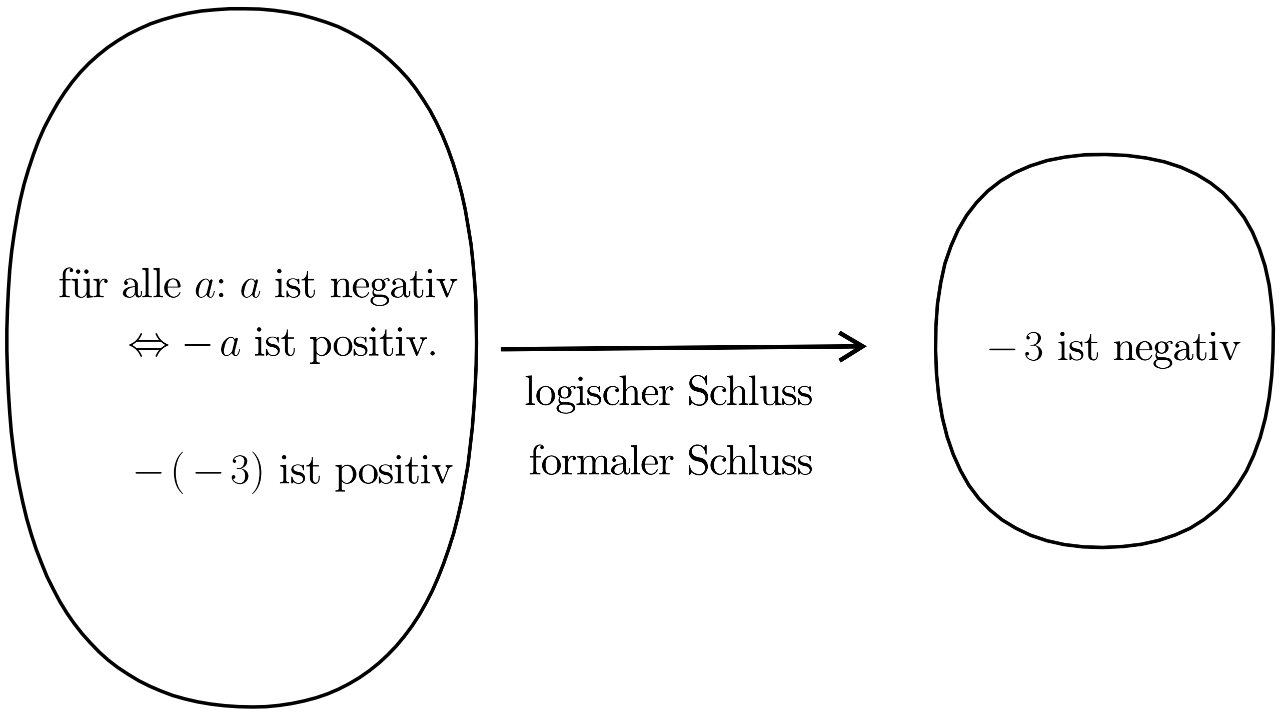


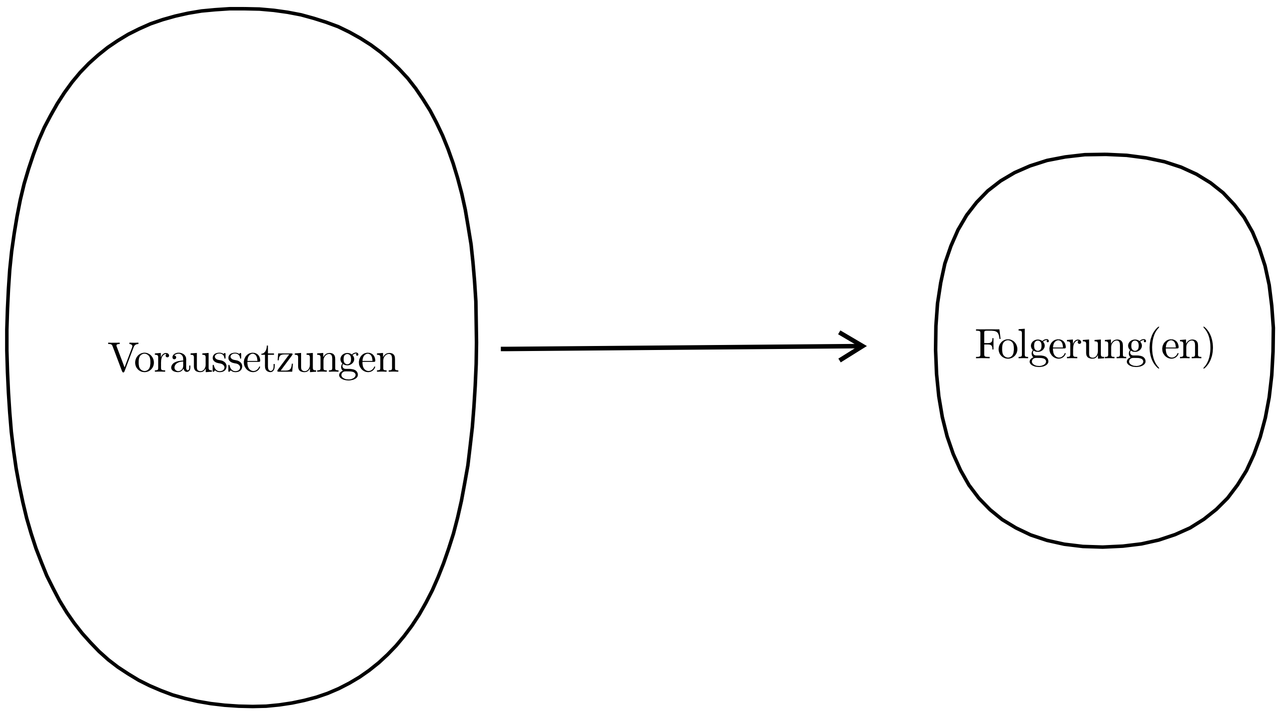
Grundvoraussetzungen
Axiome
Definitionen
Schreibweisen
Rechnungen
Argumentationen
Mathematische
Eigenschaft

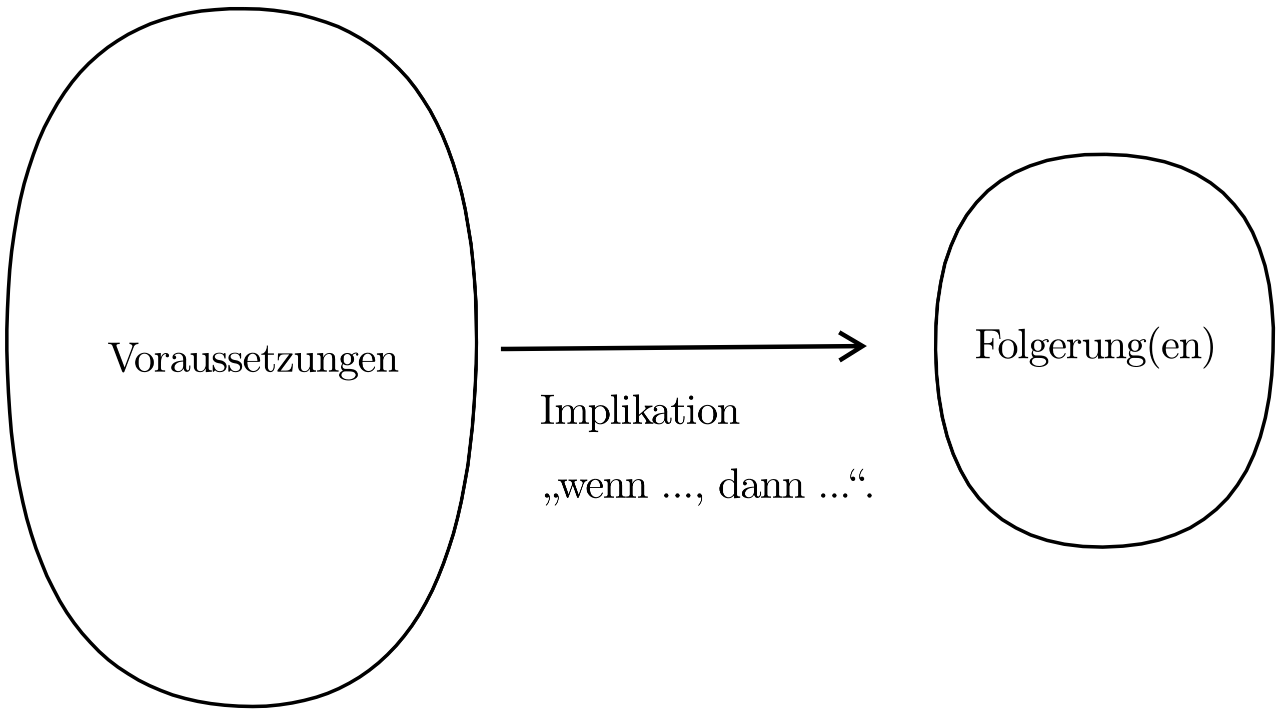

Voraussetzungen
Definition von $P(x)$
$a$ hat die Eigenschaft $P$
$a$ löst das Problem $P(x)$
$P(a)$


Rechengesetze
$1+2=x$
konkrete Rechnung
$1+2=3$


algebraische Gesetze
für $+\,,\times\,,\ldots$
$x=(a+b)\times(a-b)$
„Buchstabenrechnung“
$x=a^2-b^2$


für alle $a$: $a$ ist negativ
$\Leftrightarrow -a$ ist positiv.
$-(-3)$ ist positiv
logischer Schluss
formaler Schluss
$-3$ ist negativ


Voraussetzungen
Folgerung(en)


Voraussetzungen
Implikation
„wenn ..., dann ...“.
Folgerung(en)

Mathematische Beweise

- $B$ folgt aus $A$, wenn in *allen* Situationen, in denen $A$ gilt, auch $B$ gilt
- in der Regel gibt es *unendlich* viele Situationen/Strukturen, in denen $A$ gilt
- eine mathematische Folgerung $A \to B$ muss *bewiesen* werden: es wird ein Beweis, ein Argument, benötigt, der mit $B$ endet und nur die Voraussetzungen aus $A$ benutzt
- $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$ folgt aus den üblichen Gesetzen des Buchstabenrechnens für *ganze*, *rationale*, *reelle*, ... Zahlen
- diese Folgerung kann man so *beweisen*

$$
\begin{array}{ll}
 & (a+b) \times (a-b) \\
= & (a+b) \times (a+(-b)) \\
= & ((a+b) \times a) + ((a+b) \times (-b)) \\
\ldots & \\
= & a^2 - b^2
\end{array}
$$

- der Beweis besteht aus Einzelschritten, die unmittelbar den Gesetzen entsprechen

- allgemein bestehen Beweise aus Beweisschritten, die jeweils als allgemeingültig akzeptiert werden

- .....

## Die Irrationalität von $\sqrt{2}$

ca. 450 v. Chr., Hippasos von Metapont (?)

Hardy und Wright, *Zahlentheorie*:

> *Der übliche,* Pythagoras *zugeschriebene Beweis verläuft wie folgt. Ist* $\sqrt{2}$ *rational, dann ist die Gleichung*
>
> $$a^2 = 2b^2$$
>
> *in ganzen Zahlen* $a$, $b$ *mit* $(a,b) = 1$ *lösbar. Daher ist* $a^2$ *und damit* $a$ *selbst gerade. Ist* $a = 2c$*, dann ist* $4c^2 = 2b^2$*, also* $2c^2 = b^2$*, und* $b$ *ist ebenfalls gerade entgegen der Voraussetzung, daß* $(a,b) = 1$ *sei.*

1.1. Angenommen $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, gekürzt.
1.2. $2 \cdot b \cdot b = a \cdot a$.
1.2.1. Angenommen $a$ ist ungerade.
1.2.2. $a \cdot a$ ist ungerade.
1.2.3. $2 \cdot b \cdot b$ ist gerade.
1.2.4. $a \cdot a$ ist gerade.
1.2.5. Widerspruch.
1.3. Wenn $a$ ungerade ist, dann Widerspruch.
1.4. $a$ ist gerade.
1.5. $b$ ist ungerade.
1.6. $b \cdot b$ ist ungerade.
1.7. $b \cdot b = \frac{a}{2} \cdot a$.
1.8. $\frac{a}{2} \cdot a$ ist gerade.
1.9. $b \cdot b$ ist gerade.
1.10. Widerspruch.
2. Wenn $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, gekürzt, dann Widerspruch.
3. $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$, gekürzt.
4. Für alle $a, b$ mit $\frac{a}{b}$ gekürzt: $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$.
Also ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.1. | Angenommen $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , gekürzt. | | |
| 1.2. | $2 \cdot b \cdot b = a \cdot a$ . | | |
| 1.2.1. | Angenommen $a$ ist ungerade. | | |
| 1.2.2. | $a \cdot a$ ist ungerade. | $A$ | |
| 1.2.3. | $2 \cdot b \cdot b$ ist gerade. | | |
| 1.2.4. | $a \cdot a$ ist gerade. | $\neg A$ | |
| 1.2.5. | Widerspruch. | $\mathbb{F}$ | *Widerspruchsregel* |
| 1.3. | Wenn $a$ ungerade ist, dann Widerspruch. | | |
| 1.4. | $a$ ist gerade. | | |
| 1.5. | $b$ ist ungerade. | | |
| 1.6. | $b \cdot b$ ist ungerade. | | |
| 1.7. | $b \cdot b = \frac{a}{2} \cdot a$ . | | |
| 1.8. | $\frac{a}{2} \cdot a$ ist gerade. | | |
| 1.9. | $b \cdot b$ ist gerade. | | |
| 1.10. | Widerspruch. | | |
| 2. | Wenn $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ , gekürzt, dann Widerspruch. | | |
| 3. | $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ , gekürzt. | | |
| 4. | Für alle $a, b$ mit $\frac{a}{b}$ gekürzt: $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ . | | |
| | Also ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl. | | |

1.1. Angenommen $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, gekürzt.
1.2. $2 \cdot b \cdot b = a \cdot a$.
1.2.1. Angenommen $a$ ist ungerade.
1.2.2. $a \cdot a$ ist ungerade.
1.2.3. $2 \cdot b \cdot b$ ist gerade.
1.2.4. $a \cdot a$ ist gerade.
1.2.5. Widerspruch.
1.3. Wenn $a$ ungerade ist, dann Widerspruch. $\neg A \to \mathbb{F}$
1.4. $a$ ist gerade. $A$ *Widerspruchsbeweis*
1.5. $b$ ist ungerade.
1.6. $b \cdot b$ ist ungerade.
1.7. $b \cdot b = \frac{a}{2} \cdot a$.
1.8. $\frac{a}{2} \cdot a$ ist gerade.
1.9. $b \cdot b$ ist gerade.
1.10. Widerspruch.
2. Wenn $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, gekürzt, dann Widerspruch.
3. $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$, gekürzt.
4. Für alle $a, b$ mit $\frac{a}{b}$ gekürzt: $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$.
Also ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.

1.1. Angenommen $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, gekürzt.
1.2. $2 \cdot b \cdot b = a \cdot a$ .
1.2.1. Angenommen $a$ ist ungerade.
1.2.2. $a \cdot a$ ist ungerade.
1.2.3. $2 \cdot b \cdot b$ ist gerade.
1.2.4. $a \cdot a$ ist gerade.
1.2.5. Widerspruch.
1.3. Wenn $a$ ungerade ist, dann Widerspruch.
1.4. $a$ ist gerade.
1.5. $b$ ist ungerade.
1.6. $b \cdot b$ ist ungerade.
1.7. $b \cdot b = \frac{a}{2} \cdot a$ .
1.8. $\frac{a}{2} \cdot a$ ist gerade.
1.9. $b \cdot b$ ist gerade.
1.10. Widerspruch.
2. Wenn $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, gekürzt, dann Widerspruch.
3. $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$, gekürzt. $A(y)$
4. Für alle $a, b$ mit $\frac{a}{b}$ gekürzt: $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$ . $\forall x\, A(x)$ *Generalisierung*

Also ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.1. | Angenommen $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, gekürzt. | | |
| 1.2. | $2 \cdot b \cdot b = a \cdot a$. | | |
| 1.2.1. | Angenommen $a$ ist ungerade. | Ang. $A$ | |
| 1.2.2. | $a \cdot a$ ist ungerade. | | |
| 1.2.3. | $2 \cdot b \cdot b$ ist gerade. | | |
| 1.2.4. | $a \cdot a$ ist gerade. | | |
| 1.2.5. | Widerspruch. | $B$ | |
| 1.3. | Wenn $a$ ungerade ist, dann Widerspruch. | $A \rightarrow B$ | *Implikationsregel* |
| 1.4. | $a$ ist gerade. | | |
| 1.5. | $b$ ist ungerade. | | |
| 1.6. | $b \cdot b$ ist ungerade. | | |
| 1.7. | $b \cdot b = \frac{a}{2} \cdot a$. | | |
| 1.8. | $\frac{a}{2} \cdot a$ ist gerade. | | |
| 1.9. | $b \cdot b$ ist gerade. | | |
| 1.10. | Widerspruch. | | |
| 2. | Wenn $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, gekürzt, dann Widerspruch. | | |
| 3. | $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$, gekürzt. | | |
| 4. | Für alle $a, b$ mit $\frac{a}{b}$ gekürzt: $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$. | | |
| | Also ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl. | | |

Ein Beweiskalkül aus 5 Beweisregeln

*Widerspruchsregel*

$$\frac{A \quad \neg A}{\mathbb{F}}$$

*Widerspruchsbeweis*

$$\frac{\neg A \rightarrow \mathbb{F}}{A}$$

*Kettenschluss*

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

*Instanzierung*

$$\frac{\forall x\, A(x)}{A(y)}$$

*Generalisierung*

$$\frac{A(y)}{\forall x\, A(x)}$$

David Hilbert, 1862-1943, führte derartige Formalsprachen und Beweiskalküle in die Mathematik ein.

Einige Entsprechungen zwischen Beweiskalkül und Buchstabenrechnen

$$\frac{A \quad \neg A}{\mathbb{F}} \sim A + (-A) = 0$$

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \sim A + (-A + B) = B$$

$$\frac{\neg A \rightarrow \mathbb{F}}{A} \sim -(-A) + 0 = A$$

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Aus dem Widerspruch lässt sich alles schließen: $\mathbb{F} \rightarrow A$ .

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Aus dem Widerspruch lässt sich alles schließen: $\mathbb{F} \rightarrow A$ .

*Beweis*.

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Aus dem Widerspruch lässt sich alles schließen: $\mathbb{F} \to A$.

*Beweis*.

Angenommen $\mathbb{F}$.

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Aus dem Widerspruch lässt sich alles schließen: $\mathbb{F} \to A$.

*Beweis*.

Angenommen $\mathbb{F}$.

Angenommen $\neg A$.

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Aus dem Widerspruch lässt sich alles schließen: $\mathbb{F} \to A$ .

*Beweis*.

Angenommen $\mathbb{F}$.

Angenommen $\neg A$ .

$\mathbb{F}$.

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Aus dem Widerspruch lässt sich alles schließen: $\mathbb{F} \rightarrow A$.

*Beweis*.

Angenommen $\mathbb{F}$.

Angenommen $\neg A$.

$\mathbb{F}$.

$\neg A \rightarrow \mathbb{F}$.

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Aus dem Widerspruch lässt sich alles schließen: $\mathbb{F} \rightarrow A$.

*Beweis*.

Angenommen $\mathbb{F}$.

Angenommen $\neg A$.

$\mathbb{F}$.

$\neg A \rightarrow \mathbb{F}$.

$A$.

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Aus dem Widerspruch lässt sich alles schließen: $\mathbb{F} \to A$.

*Beweis*.

Angenommen $\mathbb{F}$.

Angenommen $\neg A$.

$\mathbb{F}$.

$\neg A \to \mathbb{F}$.

$A$.

$\mathbb{F} \to A$.

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Aus dem Widerspruch lässt sich alles schließen: $\mathbb{F} \rightarrow A$.

*Beweis*.

Angenommen $\mathbb{F}$.

Angenommen $\neg A$.

$\mathbb{F}$.

$\neg A \rightarrow \mathbb{F}$.

$A$.

$\mathbb{F} \rightarrow A$.

*Quod erat demonstrandum, Qed.*

Ein kleiner Beweis im Kalkül

Aus dem Widerspruch lässt sich alles schließen: $\mathbb{F} \to A$.

*Beweis*.

Angenommen $\mathbb{F}$.

Angenommen $\neg A$.

$\mathbb{F}$.

$\neg A \to \mathbb{F}$.

$A$.

$\mathbb{F} \to A$.

*Quod erat demonstrandum, Qed.*

Frage (Hilbert): Ist der Kalkül *vollständig*, d.h. lassen sich *alle* mathematischen Folgerungen im Kalkül beweisen?


Kurt Gödel, 1906-1978, beantwortete diese Frage positiv:

In seiner Dissertation *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls* bewies er 1928 den *Gödelschen Vollständigkeitssatz*:

Jede gültige mathematische Folgerung, die in der Hilbertschen Sprache formalisiert werden kann, lässt sich im Kalkül beweisen.

Konsequenzen

– absolutes Korrektheitkriterium für mathematische Beweise: lässt sich der Beweis zu einer Ableitung im Kalkül verfeinern?

– in der Praxis: kann man den Beweis lokal (an problematischen Stellen) zu einer solchen Ableitung verfeinern?

– die Methode ist überall anwendbar, da sich die Mathematik auf die Mengenlehre begründen lässt; die Mengenlehre, die auf Georg Cantor zurückgeht, ist vor genau 100 Jahren von Ernst Zermelo in der formalen Sprache axiomatisiert worden.

– die mengentheoretisch/formallogische Auffassung ist eine Erklärung für die Exaktheit und Allgemeingültigkeit mathematischer Ergebnisse

– .....

Vielen Dank für Ihr Interesse!