Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2.$$

a) Bestimme für jeden Punkt (x,y) den Gradienten $\nabla f(x,y)$ und für jeden Vektor $v = (a,b)$ die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y).$$

b) Berechne die Hessematrix $Hf(x,y)$ und finde alle Extremstellen der Funktion.

Aufgabe 2

Bestimme die kritischen Punkte (d.h. alle (x,y,z) mit $\nabla f(x,y,z) = 0$) der Funktion[1]

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2 + \cos(y) + z^2 x.$$

Entscheide, ob f in diesen Punkten Extremstellen besitzt.

Aufgabe 3 Das Siebengebirge sei durch die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = (1+y)x^2 - xy$$

modelliert. Ein Wanderer befindet sich im Punkt $(2,1)$ und möchte auf steilstmögliche Weise den nächstgelegenen Hügel erklimmen. Bestimme die Richtung und Steigung des steilsten Anstiegs von seiner Position aus.

Aufgabe 4

a) Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ f(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Skizziere das Bild $f(\mathbb{R})$ in einem Schaubild. Bestimme den Ableitungsvektor $f'(t)$ und zeichne die Vektoren $f'(0), f'(\pi/4)$ und $f'(\pi/2)$ an den entsprechenden Punkten $f(0), f(\pi/4)$ und $f(\pi/2)$ ins Schaubild.

b) Sei g die folgende Variante,

$$g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2, g(t) = t \cdot (\cos(t), \sin(t)).$$

Skizziere das Bild von g und bestimme die Ableitung $g'(t)$. Zeichne die Ableitungen $g'(0), g'(\pi)$ und $g'(5\pi)$ an den entsprechenden Punkten $g(0), g(\pi)$ und $g(5\pi)$ in das Schaubild.

[1] Zur Erinnerung: $\sin'(t) = \cos(t)$ und $\cos'(t) = -\sin(t)$. Dabei wird t im Bogenmaß angegeben; 2π entsprechen $360°$.