Geg.: $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, $b \in \mathbb{R}^m$

Aufg.: Löse

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Def Eine $m \times n$ Matrix A ist eine Funktion $\{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Meist gemalt als Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Menge aller $m \times n$ Matrizen nennt man $\mathrm{Mat}(m,n)$ oder auch $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ definiere

$$\mathbb{R}^n \ni A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Für $b \in \mathbb{R}^m$ gilt es also $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ zu bestimmen.

Rechenregeln

$A \in \mathrm{Mat}(m,n)$, $y, x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- $A \cdot (x+y) = (A \cdot x) + (A \cdot y)$
- $A \cdot (\lambda x) = \lambda \cdot (A \cdot x) = (\lambda A) \cdot x$
- $(A+B)x = (Ax) + (Bx)$

Def Kern von A

$$\ker A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$$

Bild von A

$$\mathrm{im}\, A = \{ b \in \mathbb{R}^m \mid Ax = b \text{ hat eine Lösung} \}.$$

Beobachtung ist $\ell \in \mathbb{R}^n$ mit $A\ell = b$, so ist

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \} = \underbrace{\ker(A) + \ell}_{\{ y + \ell \mid y \in \ker(A) \}}$$

"$\subseteq$" $Ax = b \Rightarrow A(x-\ell) = Ax - A\ell = b - b = 0$

Setze $y = x - \ell$. Dann $y \in \ker A$ und $x = y + \ell$.

"$\supseteq$" $A(y+\ell) = Ay + A\ell = 0 + b = b$ $\lrcorner$

Das Problem zerlegt sich also in zwei Teile

a) bestimme $\underline{\text{ein}}$ $\ell \in \mathbb{R}^n$ mit $A\ell = b$ "partikuläre Lösung des inhomogenen Systems"

b) bestimme $\ker A$ "allgemeine Lösung des homogenen Systems"

Hier ein unsystematisches Beispiel

Bsp.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \quad 1 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{I}': x = -2y - 3z$

Einsetzen in II und III:

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &\Leftrightarrow -3y - 6z = 0 \\ \mathrm{III} &\Leftrightarrow -6y - 12z = 0 \quad +1 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad y = -2z$$

$\Rightarrow$ unlösbar.

Einsetzen in I': $x = z$.

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \emptyset.$$

$$\rightsquigarrow \quad \ker A = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

ist eine Gerade durch 0!

Kern und Bild sind immer "verallgemeinerte Ebenen durch 0":

Def Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>Untervektorraum</u> wenn

a) $0 \in U$, b) $x, y \in U \Rightarrow x+y \in U$,

c) $x \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot x \in \mathbb{R}$

"verallgemeinerte Ebene"

Bsp: • Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$S^{\perp} := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp s \text{ für alle } s \in S \}$$

ein UVR (nachrechnen mittels $x \perp s \Leftrightarrow \langle x, s \rangle = 0$).

Wir sagen U ist in "Normalenform" bzgl. S falls $U = S^{\perp}$.

• Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{span} S = \{ t_1 s_1 + \ldots + t_k s_k \mid k \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{R}, s_i \in S \}$$

ein UVR.

Wir sagen U ist in "parametrischer Form" bzgl. S wenn $U = \operatorname{span}(S)$.

Beobachtung

- Bezeichnet $z_1^A, \dots, z_m^A \in \mathbb{R}^n$ die Zeilen von A

so gilt $$\ker A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle x, z_i^A \rangle = 0 \\ \forall\ 1 \leq i \leq m \end{array} \right\}$$

mit anderen Worten $\ker A$ besteht aus all denen $x \in \mathbb{R}^n$, die auf allen Zeilen von A senkrecht stehen. Insbesondere ist $\ker A$ in Normalenform bzgl. der Zeilen von A.

- Sind $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}^m$ die Spalten, so gilt

$$\operatorname{Im}(A) = \left\{ t_1 s_1^A + \dots + t_n s_n^A \ , \ t_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Insbesondere ist $\operatorname{im}(A)$ in parametrischer Form bzgl der Spalten von A.

Das GLS $Ax = 0$ zu lösen heißt nun $\ker A$ in parametrische Form zu bringen und umgekehrt ist es oft nützlich paramtrisch gegebene UVR's in Normalenform zu bringen. Der folgende Algorithmus tut beides:

Gauß-Jordan-Algorithmus

Beobachtung Setzen wir

Vertauschen zweier Zeilen

$$
\begin{array}{r}
\\
k\text{-te Spalte} \rightarrow \\
\\
l\text{-te Spalte} \rightarrow \\
\\
\end{array}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \\
a_{l,1} & \cdots & a_{ln} \\
\vdots & \cdots & \\
a_{k,1} & & a_{k,n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m,1} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} = A' \qquad b' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_l \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

oder für $c \in \mathbb{R}$, $k \neq l$.

$$
A'' = \begin{array}{r}
\\
k\text{-te Spalte} \rightarrow \\
\\
\end{array}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{k1} + c \cdot a_{l1} & \cdots & a_{kn} + c \cdot a_{ln} \\
\vdots & & \\
a_{m1} & & a_{mn}
\end{pmatrix} \qquad b'' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k + c b_l \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

$c \neq 0$

$$
A''' = \begin{pmatrix}
a_{11} & & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
c \cdot a_{k1} & \cdots & c\, a_{kn} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1} & & a_{mn}
\end{pmatrix} \qquad b''' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ c\, b_k \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

so gilt

$$
\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b'\}
$$

$$
\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel
$$

$$
\{x \in \mathbb{R}^n \mid A'''x = b'''\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A''x = b''\}.
$$

Behauptung durch diese drei Operationen kann man $(A|b)$ auf Gestalt

$$
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & * & * & 0 & 0 & * & 0 & * & * & \\
 & & & 1 & 0 & * & 0 & * & * & \\
 & & & & 1 & * & 0 & * & * & * \\
 & 0 & & & & & 1 & * & * &
\end{array}\right)
$$

bringen.

Nennen wir die Einträge $a^{lös}_{ij}$ und $b^{lös}_i \in \mathbb{R}$, also

$$
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ k\text{-te Spalte} \rightarrow
\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & a^{lös}_{12} & a^{lös}_{13} & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & \\
 & & & 1 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & \\
 & & & & 1 & a^{lös}_{36} & 0 & \vdots & b^{lös} \\
 & & & & & & 1 & a^{lös}_{48} &
\end{array}\right)
$$

so ist dann $Ax = b$ lösbar $\Longleftrightarrow$

$$b^{lös}_i = 0 \quad \text{für } i > k.$$

Setzen wir noch $SR \subseteq \{1, \dots, n\}$ als die Menge aller Spalten der Form $\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, so gilt:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i \in \mathbb{R} \text{ beliebig, wenn } i \notin SR. \\ x_i = b^{lös}_i - \sum\limits_{j \geq i} a^{lös}_{ij} x_j \end{array} \right\}$$

<u>Bsp</u>

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 5 \\
 & & 1 & 4 & 0 & 6 \\
 & & & & 1 & 7
\end{array}\right) \Rightarrow SR = \{2, 4\}$$

$$\text{Lös} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 - 2s - 3t \\ s \\ 6 - 4t \\ t \\ 7 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

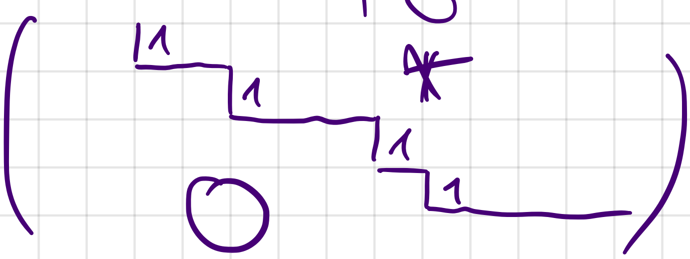
Algorithmus

1. Schritt: a) Ist erste Spalte 0? Dann weiter mit L

b) Ist $a_{11} = 0$? Dann tausche eine Zeile mit $a_{k,1} \neq 0$ für die erste.

2. Schritt: Es gilt nun $a_{11} \neq 0$. Ziehe von für alle $2 \le k \le m$ (außer der ersten) das $\frac{a_{k,1}}{a_{1,1}}$-fache der ersten Zeile von der k-ten ab. Teile die erste Zeile durch $a_{1,1}$.

3. Schritt: Es gilt $a_{k,1} = 0$ für alle $k \geq 2$. Betrachte die Matrix ohne erste Spalte und Zeile und fange wieder vorne an bis folgende Form erreicht ist:



4. Schritt: Ziehe jede Zeile von allen höheren mit aS. entsprechender Vielfachheit aS.

Bsp

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4a-b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & c-7a-2(b-4a) \end{array}\right)$$

$$= c + a - 2b$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a - 2\left(\frac{4a-b}{3}\right) = \frac{-5a-2b}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 4a-b/3 \\ 0 & 0 & 0 & c+a-2b \end{array}\right)$$

lösbar $\Leftrightarrow$ $c + a - 2b = 0$

$\rightsquigarrow \operatorname{Im} A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp}$ Normalenform des Bildes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{-5a-2b}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4a-b}{3} \\ 0 & 0 & 0 & c-3a-2b \end{array}\right)$$

Lösung: für $a=b=c=0$

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$ parametrische Form des Kerns

Allgemein:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-5a-2b}{3} + t \\ \frac{4a-b}{3} - 2t \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\parallel$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-5a-2b}{3} \\ \frac{4a-b}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Letztes Mal:

Gegeben: $A \in \operatorname{Mat}(m,n)$, $b \in \mathbb{R}^m$

Gauß-Jordan Algorithmus:

⇝ parametrisierte Form für $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$,

$$\ker A = \begin{pmatrix} \text{Zeilen} \\ \text{von } A \end{pmatrix}^\perp \qquad \emptyset \text{ oder } \ell + \ker A$$

⇝ normalen Form für

$$\operatorname{im} A = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid Ax = y \text{ hat Lösung} \}.$$

$$= \operatorname{span}(\text{Spalten von } A).$$

Hier $\operatorname{span}(S) = \{ t_1 s_1 + \dots + t_n s_n \mid t_i \in \mathbb{R},\ s_i \in S \}$.

Def Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>UVR</u> wenn

1) $0 \in U$
2) $x \in U,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot u \in \mathbb{R}$
3) $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$.

<u>Beobachtung</u>:
- $S^\perp$ und $\operatorname{span}(S)$ sind UVR's
- $S^\perp = \operatorname{span}(S)^\perp$.

Heute: Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^n$ UVR + $S \subseteq U$ mit $U = \mathrm{span}(S)$

Finde minimales $S' \subseteq S$ mit $U = \mathrm{span}(S')$!

Def: Ein $S \subseteq U$ mit $\mathrm{span}(S) = U$ heißt

- Erzeugendensystem, das heißt jedes $u \in U$ lässt sich schreiben als
$$u = t_1 s_1 + \dots + t_k s_k \qquad t_i \in \mathbb{R}, \; s_i \in S.$$
- Ein $S \subseteq U$ heißt linear unabhängig, wenn jedes $s \in \mathrm{span}(S)$ nur genau eine Darstellung wie oben hat, also wenn
$$t_1 s_1 + \dots + t_k s_k = t_1' s_1 + \dots + t_k' s_k$$
$$\Rightarrow t_i = t_i' \quad \forall i.$$
- Ein linear unabhängiges EZS von U heißt Basis.

Bsp: • Setze $e_k \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ k-te Stelle.

Dann bilden $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis.

"Standardbasis"

- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ bilden Basis von $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

gilt genau dann, wenn

$$c = t_3, \quad t_2 + t_3 = b, \quad t_1 + t_2 + t_3 = a$$

also $\quad t_2 = b - c \quad, \quad t_1 = a - b.$

Es gibt also eine eindeutige Darstellung:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (b-c)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$ sind <u>nicht</u> linear unabhängig

$$0\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

weil $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \in \ker\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

- $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}}$ spannen auch nicht $\mathbb{R}^3$ auf:

jeder Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ in $\mathrm{span}(\ldots)$ erfüllt ja $2b = a + c$ wie wir letztes mal ausgerechnet hatten.

Beobachtung S ist linear unabhängig genau wenn $0 = t_1 s_1 + \dots + t_i s_i$ mit $t_i \in \mathbb{R}$, $s_i \in S$ nur für $t_1 = \dots = t_i = 0$ möglich ist.

Γ "$\Rightarrow$" klar, weil Eindeutig der Darstellung von 0.

"$\Leftarrow$" gilt $t_1 s_1 + \dots + t_i s_i = t_1' s_1 + \dots + t_i' s_i$

$$\Rightarrow 0 = (t_1 - t_1') s_1 + \dots + (t_i - t_i') s_i$$

$$\Rightarrow t_1 - t_1' = \dots = t_i - t_i' = 0$$

$\lrcorner$

$\rightsquigarrow$ Wir können mit dem GJ-Algorithmus endliche Mengen S auf lineare Unabhängigkeit testen:

Schreibe
$$A = \left(s_1 \mid s_2 \mid \dots \mid s_i \right) \in \mathrm{Mat}(n, i)$$
und teste, ob $\ker A = \{0\}$?

__Erinnerung__ Ist A in Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & * & 0 & * & \\ & & & 1 & 0 & * & 0 & * & \\ & & & & 1 & a_{36} & c & * & \cdots \\ & 0 & & & & & 1 & * & \\ & & & & & & & & 1 \cdots \end{pmatrix}$$

Setze $SR \subseteq \{1, \dots, n\}$ als die Menge der Spalten der Form $\begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$.

Dann gilt:

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x_i \in \mathbb{R} \text{ beliebig, wenn } i \notin SR. \\ x_i = - \sum_{j>i} a_{ij} x_j, \quad i \in SR \end{matrix} \right\}$$

Dann bilden die e_k^{fund} für $k \notin SR$ eine Basis von $\ker A$.

$$\left(e_k^{fund}\right)_i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k, \; k \notin SR \\ 0 & i > k, \; k \in SR \\ -a_{lk} & i < k, \; k \in SR \end{cases}$$

wo l die i-te Zahl in $\{1, \dots, n\} \setminus SR$ ist.

Setze alle Variablen bis auf x_k auf 0!

! Das stand falsch an der Tafel.

Dass diese Vektoren den Kern erzeugen ist sehr einfach zu sehen, für die lineare Unabhängigkeit bemerke nur, dass ℓ_i^{fund} der einzige Vektor mit $(\ell_i^{fund})_i \neq 0$ ist.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 & f \\ & 1 & c & 0 & g \\ & & & 1 & h \\ 0 & & & & \end{pmatrix} = A$, $SR = \{1,2,4\}$

$$\ell_3^{fund} = \begin{pmatrix} -b \\ -c \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ell_5^{fund} = \begin{pmatrix} -f \\ -g \\ 0 \\ -h \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder konkret:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} = A, \quad \ker A = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ -s-t \\ s \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>Erinnerung</u>

Entsteht A' aus A durch Gauß-Jordan-Moves so gilt $\ker A' = \ker A$.

$\rightsquigarrow$ können Basen von Kernen bestimmen

! $\operatorname{im}(A) \neq \operatorname{im}(A')$!

Die Sätze von Steinitz

Satz I $U \subseteq \mathbb{R}^n$ UVR, $S \subseteq U$

- S Basis von $U \iff S$ ist maximales l.u.-System in U
- S Basis von $U \iff S$ ist minimales EZS von U

Satz II (Basisergänzungssatz)

$U \subseteq U'$ UVR's, S Basis von U, S' Basis von U'

$\Rightarrow \exists\, T \subseteq S'$, sodass

i) $S \cup T$ Basis von U'

ii) $|S \cup T| = |S'|$.

Cor: Je zwei Basen von U haben gleich viele Elemente.

Def: Anzahl Basiselemente heißt **Dimension** von U.

Cor: $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$. Dann gilt

$\dim \ker A + \dim \mathrm{im}(A) =$ Anzahl der Spalten von A

$\left(\begin{array}{l} = \text{Länge der Zeilen von } A \\ = n \end{array} \right)$

Bew (Satz I)

a) Sei S maximal l.u. und $u \in U$.

$\Rightarrow \{u\} \cup S$ l.a.

$\Rightarrow 0 = \lambda u + \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$

S l.u. $\Rightarrow \lambda \neq 0$

$\Rightarrow u = \frac{\lambda_1}{\lambda} s_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda} s_k$

$\Rightarrow u \in \operatorname{span}(S)$

$\Rightarrow S$ EZS $\Rightarrow S$ Basis.

b) Sei S ein EZS und

$0 = \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k$ mit $\lambda_i \neq 0$

$\Rightarrow s_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} s_1 \dots + \quad , \quad + \frac{-\lambda_k}{\lambda_i} s_k$

ohne s_i

$\Rightarrow S \setminus \{s_i\}$ ist auch EZS.

$\Rightarrow S$ nicht minimal.

c) Die beiden Implikationen

S Basis $\Rightarrow S$ minimal EZS

$\Rightarrow S$ maximal l.u.

sind einfach und bleiben euch überlassen.

<u>Bew</u> (Satz II) Schreibe $S' = \{s_1', \dots, s_k'\}$

Gegeben $s_1 \in S$, wollen wir s_i' finden sodass $S \setminus \{s_i'\} \cup \{s_1\}$ auch Basis von U' ist.

Schreibe:

$$(*) \qquad s_1 = t_1 s_1' + \dots + t_k s_k'.$$

Wegen $s_1 \neq 0$ gilt $t_i \neq 0$ für mindestens ein i.

$$\rightarrow (**) \quad s_i' = \frac{-t_1 s_1'}{t_i} - \dots - \frac{t_{i-1} s_{i-1}'}{t_i} + \frac{1}{t_i} s_1 - \frac{t_{i+1} s_{i+1}'}{t_i} - \dots - \frac{t_k s_k'}{t_i}.$$

<u>Beh</u>: $S' \setminus \{s_i'\} \cup s_1$ ist Basis von U'.

$\ulcorner$ EZS: Geg. $u = t_1' s_1' + \dots + t_k' s_k'$ (S' ist EZS)

Einsetzen von $(**)$.

LU: Gilt $0 = t_1' s_1' + \dots + t_{i-1}' s_{i-1}' + t_i s_1 + t_{i+1}' s_{i+1} + \dots + t_k' s_k$

Einsetzen von $(*)$ liefert (da S' l.u.):

$$t_j' + t_i' t_j = 0 \quad \forall\, i \neq j \quad \text{und} \quad t_i' t_i = 0$$

$$\Rightarrow t_i' = 0 \Rightarrow t_j' = 0 \quad \forall\, j. \lrcorner$$

Für $s_2 \in S$ wiederhole den Algorithmus:

Schreibe

$$s_2 = t_1 s_1' + \dots + t_{i-1} s_{i-1}' + t_i s_1 + t_{i+1} s_{i+1}' + \dots + t_k s_k'.$$

Dann gilt $t_j \neq 0$ für mindestens ein $j \neq i$, da s_1, s_2 linear unabhängig sind.

$\rightsquigarrow$ $S' \setminus \{s_i', s_j'\} \cup \{s_1, s_2\}$ ist Basis von U'.

usw. $\lrcorner$

Hier noch ein alternativer Algorithmus zum finden von T (der allerdings nicht klar macht, dass $|T \cup S| = |S'|$):

Setze $S_0 := S$:

Ist $S_i \cup \{s_{i+1}\}$ linear unabhängig?

Ja: Setze $S_{i+1} = S_i \cup \{s_{i+1}\}$

Nein: Setze $S_{i+1} = S_i$

Dann gilt

S_{i+1} ist Basis von $\operatorname{span}(S \cup \{s_1', \dots, s_{i+1}'\})$

Wiederhole bis $i = k-1$.

Beweis (Cor)

Ist B Basis von $\ker A$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n$. Wähle $T \subseteq \{e_1, \dots, e_n\}$ mit

$B \cup \{e_i \mid i \in T\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$.

Beh Dann ist $\{A e_i \mid i \in T\}$ Basis von im A.

"T-Spalte" von A.

$\ulcorner$ EZS: Klar.

LU: Schreibe $T = \{t_1, \dots, t_k\}$.

Angenommen:

$$0 = \lambda_{t_1} A \cdot e_{t_1} + \dots + \lambda_{t_k} A \cdot e_{t_k}$$
$$= A(\underbrace{\lambda_{t_1} e_{t_1} + \dots + \lambda_{t_k} e_{t_k}}_{=:v})$$

$\Rightarrow v \in \ker A$

$$\Rightarrow v = \lambda'_1 b_1 + \dots + \lambda'_j b_j$$

Dann haben wir aber zwei Darstellungen von v in Termen der Basis $B \cup \{e_i \mid i \in T\}$

$\Rightarrow \lambda_{t_1} = \dots = \lambda_{t_k} = 0.$ $\lrcorner$