Einführung in die Algebra — Übungsblatt 7

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Abgabe**: 30. November 2017, **vor** der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

Aufgabe 1. (6 Punkte $= 1 + 1 + 1 + 1 + 2$)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Polynome, jeweils über den gegebenen Ringen, irreduzibel sind oder nicht.

(a) $t^4 + 6t^3 - 12$ in $\mathbb{Z}[t]$,
(b) $t^7 + 3t^4 + 6t^2 - 12$ in $\mathbb{Q}[t]$,
(c) $t^7 + 3t^4 + 6t^2 - 12$ in $\mathbb{R}[t]$,
(d) $t^4 + 4$ in $\mathbb{Z}[t]$.

(e) Erinnern Sie sich, dass $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist, und ist deshalb ein Integritätsbereich (weil $\mathbb{C}$ ein ist). Deshalb existiert der Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(A)$. Zeigen Sie, dass das Polynom $3t^2 + 4t + 3$ in $A[t]$ irreduzibel ist (dafür müssen Sie zeigen, dass es keine Lösung in A für die Gleichung $3t^2 + 4t + 3 = 0$ geben kann), aber in $\mathrm{Quot}(A)[t]$ reduzibel ist. Warum ist diese Aussage kein Widerspruch zum Satz von Gauß?

Aufgabe 2. (4 Punkte $= 1 + 3$)

Seien A ein Ring und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A. Zeigen Sie:

(a) Wenn A ein Integritätsbereich ist, dann ist $S^{-1}A$ auch ein Integritätsbereich.
(b) Wenn A ein Hauptidealring ist und $0 \notin S$, dann ist $S^{-1}A$ auch ein Hauptidealring.

Aufgabe 3. (10 Punkte $= 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 2$)

Für eine positive ganze Zahl n, sei $W_n \subseteq \mathbb{C}$ die Menge aller complexen Zahlen z, so dass $z^n = 1$.

(a) Beschreiben Sie explizit alle Elemente von W_2, W_3 und W_4 als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. (Dabei sollte die Beschreibung wirklich explizit sein und keine allgemeine Formel.)
(b) Zeigen Sie, dass W_n durch Multiplikation eine Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist, und dass die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ durch Multiplikation eine Gruppe isomorph zu $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist.
(c) Berechnen Sie die Kreisteilungspolynomen $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \ldots, \Phi_8(t)$.
(d) Sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl, so dass $p \mid n$. Zeigen Sie, dass $\Phi_{np}(t) = \Phi_n(t^p)$. Berechnen Sie damit $\Phi_{p^k}(t)$ für jede Primzahl p und $k \in \mathbb{N}$.
(e) Seien $f, g \in \mathbb{Z}[t]$ zwei Polynome, wobei f normiert ist. Zeigen Sie, dass es $q, r \in \mathbb{Z}[t]$ gibt, mit $g = qf + r$ und entweder $r = 0$ oder $\mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(f)$.
(f) Zeigen Sie, dass $\Phi_d(t) \in \mathbb{Z}[t]$ und normiert ist für alle $d \in \mathbb{N}$.
Verwenden Sie Induktion nach d. Schreiben Sie $t^d - 1 = f\Phi_d(t)$, mit $f \in \mathbb{Z}[t]$ und normiert nach Induktionsvoraussetzung, und teilen Sie dann $t^d - 1$ durch f unter Verwendung vom Teil (e).