

# V2A2 Einführung in die Mathematische Logik

**Philipp Hieronymi**

Ringvorlesung, Januar 2025



**Universität Bonn**  
**Mathematisches Institut**

## Lernziele

- ▶ Kenntnis und Verständnis grundlegender Konzepte der Mathematischen Logik bis zum Gödelschen Vollständigkeitssatz mit Anwendungen
- ▶ Kenntnisse zur Grundlegung der Mathematik
- ▶ Fähigkeit zum Formalisieren von mathematischen Begriffen und Beweisen
- ▶ Wissen um Möglichkeiten und Grenzen der formalen Methode.

## Inhalte

- ▶ Syntax und Semantik der Prädikatenlogik, Ableitungskalküle
- ▶ Theorien und Modellklassen
- ▶ Gödelscher Vollständigkeitssatz
- ▶ die Zermelo-Fraenkelschen Axiome der Mengenlehre
- ▶ Unvollständigkeitssätze

## Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre

Die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (kurz: ZF) ist ein axiomatisches System, welches Anfang des 20ten Jahrhunderts entwickelt wurde. Heutzutage ist ZF zusammen mit dem Auswahlaxiom (kurz: ZFC) die Standardform der axiomatischen Mengenlehre und als solche die am meisten genutzte Grundlage der Mathematik.



### Zitat von Wikipedia

*“Die ZFC-Mengenlehre ist ein bewährter und weithin akzeptierter Rahmen für die Mathematik, obwohl die meisten Mathematiker nicht in der Lage sind, die ZFC-Axiome aufzuzählen.”*

## Gödels Vollständigkeitssatz

Wenn  $\Sigma \models \varphi$ , dann  $\Sigma \vdash \varphi$ .

*Informell:* Angenommen, dass immer wenn  $\Sigma$  gilt, auch  $\varphi$  gilt. Dann gibt es einen Beweis, dass  $\varphi$  aus  $\Sigma$  folgt.



## Gödels Unvollständigkeitssatz

Sei  $\Sigma$  rekursiv aufzählbare und *hinreichend mächtig*. Dann gibt es  $\varphi$ , so dass entweder

- ▶  $\Sigma \vdash \varphi$  und  $\Sigma \vdash \neg\varphi$  ( $\Sigma$  ist *widersprüchlich*), oder
- ▶  $\Sigma \not\vdash \varphi$  und  $\Sigma \not\vdash \neg\varphi$  ( $\Sigma$  ist *unvollständig*).

Insbesondere, gilt dies für die Peano-Arithmetik.



## Grenzen der formalen Methode

Es gibt keinen Algorithmus, der folgendes Problem löst:

Sei  $p \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ . Hat  $p$  eine Nullstelle in  $\mathbb{Z}^n$ ?

Dies ist bekannt als Hilberts 10tes Problem (MRDP Theorem), gelöst 1970 von Yuri Matiyasevich, nach Vorarbeit von Martin Davis, Hilary Putnam and Julia Robinson



## Logik-Zyklus in Bonn

### Vorlesungen:

- ▶ V2A2 - Einführung in die Mathematische Logik, SoSe 25
- ▶ V3A5/F4A1 - Mathematische Logik, WiSe 25/26
- ▶ V4A7 - Advanced Mathematical Logic I, SoSe 26
- ▶ V4A8 - Advanced Mathematical Logic II, WiSe 26/27

### Seminare:

- ▶ S2A2 - Hauptseminar Mathematische Logik, oder S2A4 - Hauptseminar Angewandte Mathematische Logik, WiSe 25/26
- ▶ S4A4 - Graduate Seminar on Logic, oder S4A6 - Graduate Seminar on Applied Logic, SoSe 26, WiSe 26/27

## Themen von Abschlußarbeiten

Bachelor:

- ▶ The Pila-Zannier method for abelian varieties
- ▶ Decidability Questions in Ostrowski Numeration Systems
- ▶ Automated theorem-proving in combinatorics on words
- ▶ Bridging Model Theory and Machine Learning
- ▶ ...

Master:

- ▶ Decidability in expansions of local fields
- ▶ Complexity Theory in Expansions of Presburger Arithmetic
- ▶ An analogue of Cobham's theorem for scalar multiplication
- ▶ O-Minimality in Arithmetic Geometry
- ▶ ...



## Buchempfehlungen

- ▶ Hofstadter (1979) *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*
- ▶ Budiansky (2021) *Journey to the Edge of Reason: The Life of Kurt Gödel*
- ▶ Feferman & Feferman (2008) *Alfred Tarski: Life and Logic*

Wir lernen wie Theoreme der linearen Algebra in der IT und der Data Science unmittelbare Anwendung finden:

- ▶ Googles PageRank Algorithmus,
- ▶ Bild- und Tonkompressionsmethoden wie JPEG and MP3,
- ▶ Automatische Gesichts- und Schrifterkennung,
- ▶ Data Science und Machine Learning Anwendungen.

Wir werden die Verteilung von Memes in soziale Netzwerke analysieren, die Hauptfigur in *Game of Thrones* bestimmen, eine Karaoke-Version von Queens *Bohemian Rhapsody* erstellen.



*"What is data science, if not linear algebra persevering?" - Vision (maybe)*

*Vielen Dank!*