

Shimura-Varietäten II

Ulrich Görtz

<http://www.math.uni-bonn.de/people/ugoertz/shimura.html>

4. Mai 2006

- 1 Adele
- 2 Shimura-Varietäten
- 3 Der Siegel-Fall
- 4 Allgemeinere Shimura-Varietäten

- 1 Adele
- 2 Shimura-Varietäten
- 3 Der Siegel-Fall
- 4 Allgemeinere Shimura-Varietäten

- 1 Adele
- 2 Shimura-Varietäten
- 3 Der Siegel-Fall
- 4 Allgemeinere Shimura-Varietäten

Adele: Definition

Ring der Adele

$$\mathbb{A} := \mathbb{R} \times \prod_{p \text{ Primzahl}} (\mathbb{Q}_p | \mathbb{Z}_p)$$

Ring der endlichen Adele

$$\mathbb{A}_f := \prod_{p \text{ Primzahl}} (\mathbb{Q}_p | \mathbb{Z}_p) = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

Haben Diagonaleinbettung $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{A}$.

Analog für E/\mathbb{Q} Zahlkörper: $\mathbb{A}_E, \mathbb{A}_{E,f}$.

\mathbb{A}_f -wertige Punkte einer alg. Gruppe

Sei G eine algebraische Gruppe über \mathbb{Q} . Versehen $G(\mathbb{A}_f)$ mit Topologie wie folgt:

Wähle Einbettung $G \longrightarrow GL_N$ und setze

$$G(\mathbb{Z}_\ell) = G(\mathbb{Q}_\ell) \cap GL_N(\mathbb{Z}_\ell).$$

Dann ist

$$G(\mathbb{A}_f) = \prod (G(\mathbb{Q}_\ell) | G(\mathbb{Z}_\ell)),$$

und diese Darstellung liefert Topologie auf $G(\mathbb{A}_f)$, unabhängig von der Einbettung $G \longrightarrow GL_N$.

Kongruenzuntergruppen

G/\mathbb{Q} reduktive alg. Gruppe, $G \longrightarrow GL_n$ Einbettung.

$$\Gamma(N) = G(\mathbb{Q}) \cap \{g \in GL_n(\mathbb{Z}); g \equiv E_n \pmod{N}\}$$

Definition

Eine Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe, die ein $\Gamma(N)$ als Untergruppe von endlichem Index enthält:

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subset G(\mathbb{Q}).$$

Satz

Die Kongruenzuntergruppen von $G(\mathbb{Q})$ sind genau die Untergruppen der Form $K \cap G(\mathbb{Q})$, wo $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ kompakt offen.

Starke Approximation

Theorem

Sei G/\mathbb{Q} eine halbeinfache, einfach zusammenhängende algebraische Gruppe von nicht-kompaktem Typ. Dann ist $G(\mathbb{Q})$ dicht in $G(\mathbb{A}_f)$.

Reelle Approximation, Hasse-Prinzip

Theorem

Sei G eine zusammenhängende algebraische Gruppe über \mathbb{Q} . Dann ist $G(\mathbb{Q})$ dicht in $G(\mathbb{R})$.

Reelle Approximation, Hasse-Prinzip

Theorem

Sei G eine zusammenhängende algebraische Gruppe über \mathbb{Q} . Dann ist $G(\mathbb{Q})$ dicht in $G(\mathbb{R})$.

Theorem

Sei G/\mathbb{Q} eine einfach zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe. Dann erfüllt G das Hasse-Prinzip, d. h. die Abbildung

$$H^1(\mathbb{Q}, G) \longrightarrow \prod_{v \in \text{PI}(\mathbb{Q})} H^1(\mathbb{Q}_v, G_{\mathbb{Q}_v}) = H^1(\mathbb{R}, G_{\mathbb{R}})$$

ist injektiv.

- 1 Adele
- 2 Shimura-Varietäten**
- 3 Der Siegel-Fall
- 4 Allgemeinere Shimura-Varietäten

Ziel

Verallgemeinerung der Ergebnisse für Modulkurven $\Gamma \backslash \mathbb{H}$

Insbesondere: Modell über Zahlkörper

Darum (und/bzw. um geeignete Γ 's zu produzieren) starten wir mit reductiver algebraische Gruppe über \mathbb{Q} .

Shimura-Daten

Definition

Ein **Shimura-Datum** ist ein Paar (G, X) , bestehend aus einer reduktiven algebraischen Gruppe G über \mathbb{Q} und einer $G(\mathbb{R})$ -Konjugationsklasse von Homomorphismen $h: \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$, so dass gilt:

- SV1** Für alle $h \in X$ ist $\text{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ vom Typ $(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$.
- SV2** Die Involution $\text{int}h(i)$ ist eine Cartan-Involution von $G_{\mathbb{R}}^{\text{ad}}$.
- SV3** G^{ad} hat keinen über \mathbb{Q} definierten Faktor H , so dass $H(\mathbb{R})$ kompakt ist.

Beispiel: $G = GL_2$

Beispiel

Sei $G = GL_{2,\mathbb{Q}}$, und sei X die $GL_2(\mathbb{R})$ -Konjugationsklasse von

$$h_0: \mathbb{S} \longrightarrow GL_{2,\mathbb{R}}, \quad a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Haben Bijektion

$$X \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \quad gh_0g^{-1} \mapsto gi.$$

Satz

Sei (G, X) ein Shimura-Datum. Dann trägt X eine eind. best. Struktur einer kpl. Mf., so dass für jede Darstellung $\rho: G_{\mathbb{R}} \rightarrow GL(V)$ die Familie $(V, \rho \circ h)_{h \in X}$ eine holom. Familie von HS ist.

Für diese kpl. Struktur ist jede solche Familie sogar eine Variation von HS. Insbes. ist X eine endl. disj. Vereinigung hermitescher symmetrischer Bereiche.

Definition

$K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen.

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K$$

Definition

$K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen.

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K$$

Alternative Beschreibung

Ist $X = G(\mathbb{R}) / K_\infty$, so

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / KK_\infty$$

Satz

Sei $\mathcal{C} \subset G(\mathbb{A}_f)$ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen $G(\mathbb{Q})_+ \backslash G(\mathbb{A}_f)/K$.

Sei X^+ eine Zusammenhangskomponente von X .

Dann

$$G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K \cong \coprod_{g \in \mathcal{C}} \Gamma_g \backslash X^+,$$

wobei $\Gamma_g = gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})_+$.

Lemma

Sei $X^+ \subseteq X$ eine Zusammenhangskomponente. Dann ist die natürliche Abbildung

$$G(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) \longrightarrow G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)$$

eine Bijektion.

Lemma

Sei $X^+ \subseteq X$ eine Zusammenhangskomponente. Dann ist die natürliche Abbildung

$$G(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) \longrightarrow G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f)$$

eine Bijektion.

Beweis.

surjektiv

Reelle Approximation: G zushgd. alg. Gp. $\implies G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{R})$ dicht
 $G(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf X

injektiv

Stabilisator von X^+ ist $G(\mathbb{R})_+$. □

Shimura-Varietäten

Definition

(G, X) Shimura-Datum. Die zugehörige Shimura-Varietät ist das inverse System

$$(\mathrm{Sh}_K(G, X))_K,$$

zusammen mit der unten beschriebenen $G(\mathbb{A}_f)$ -Operation, wobei $K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ offen, kompakt, (hinreichend klein).

$G(\mathbb{A}_f)$ -Operation

Für $g \in G(\mathbb{A}_f)$ haben wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}_K(G, X) &\longrightarrow \mathrm{Sh}_{g^{-1}Kg}(G, X) \\ (x, a) &\longmapsto (x, ag) \end{aligned}$$

Zusammenhangskomponenten

Sei (G, X) ein Shimura-Datum, Z das Zentrum von G ,
 $T = G/G^{\text{der}}$ der größte abelsche Quotient von G . Haben
 $Z \longrightarrow G \xrightarrow{\nu} T$.

Definiere

$$T(\mathbb{R})^\dagger = \text{im}(Z(\mathbb{R}) \longrightarrow T(\mathbb{R}))$$

$$T(\mathbb{Q})^\dagger = T(\mathbb{Q}) \cap T(\mathbb{R})^\dagger$$

Beispiel

Ist $G = GL_2$, so ist $\nu = \det: GL_2 \rightarrow T \cong \mathbb{G}_m$,

$$T(\mathbb{Q})^\dagger = T(\mathbb{Q})^+ = \mathbb{Q}_{>0}.$$

Theorem

Sei G^{der} einfach zusammenhängend.

- ① Es gilt $\nu(G(\mathbb{Q})_+) \subseteq T(\mathbb{Q})^\dagger$.
- ② Für hinreichend kleine K induziert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
 G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K & \xrightarrow{\cong} & \\
 G(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) / K & \longrightarrow & T(\mathbb{Q})^\dagger \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K) \\
 (x, g) & \mapsto & \nu(g)
 \end{array}$$

eine Bijektion

$$\pi_0(\text{Sh}_K(G, x)) \xrightarrow{\cong} T(\mathbb{Q})^\dagger \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K)$$

Lemma

Sei G^{der} einfach zushgd., und sei $t \in T(\mathbb{Q})$. Es gilt $t \in T(\mathbb{Q})^\dagger$ genau dann, wenn t zu einem Element von $G(\mathbb{Q})_+$ liftet.

Lemma

Sei G^{der} einfach zushgd., und sei $t \in T(\mathbb{Q})$. Es gilt $t \in T(\mathbb{Q})^\dagger$ genau dann, wenn t zu einem Element von $G(\mathbb{Q})_+$ liftet.

Beweis.

Mit dem Lemma

$$T(\mathbb{Q})^\dagger \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K) = \nu(G(\mathbb{Q})_+) \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K).$$

Betrachte Faser über 1 von

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) / K &\longrightarrow \nu(G(\mathbb{Q})_+) \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K) \\ (x, g) &\longmapsto \nu(g) \end{aligned}$$

Sehen: die Faser ist $\Gamma \backslash X^+$, wobei Γ das Bild von $K \cap G(\mathbb{Q})_+$ in $G^{\text{ad}}(\mathbb{Q})^+$. □

Endlich viele Zusammenhangskomponenten

Satz

Ist T ein algebraischer Torus über \mathbb{Q} , so ist $T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f)$ kompakt.

Korollar

Die Menge $T(\mathbb{Q})^\dagger \backslash T(\mathbb{A}_f) / \nu(K)$ ist endlich.

Beweis.

Für $T = \mathbb{G}_m$ haben wir

$$T(\mathbb{A}_f)/T(\widehat{\mathbb{Z}}) = \mathbb{A}_f^\times / \widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \bigoplus_{\ell} \mathbb{Q}_\ell^\times / \mathbb{Z}_\ell^\times \cong \bigoplus_{\ell} \mathbb{Z},$$

die Gruppe der gebrochenen Ideale von \mathbb{Z} . Also

$$\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_f^\times / \widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \text{Cl}(\mathbb{Q}) = 1,$$

und $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_f^\times$ ist als Quotient von $\widehat{\mathbb{Z}}$ kompakt.

Beweis.

Für $T = \mathbb{G}_m$ haben wir

$$T(\mathbb{A}_f)/T(\widehat{\mathbb{Z}}) = \mathbb{A}_f^\times / \widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \bigoplus_{\ell} \mathbb{Q}_\ell^\times / \mathbb{Z}_\ell^\times \cong \bigoplus_{\ell} \mathbb{Z},$$

die Gruppe der gebrochenen Ideale von \mathbb{Z} . Also

$$\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_f^\times / \widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \text{Cl}(\mathbb{Q}) = 1,$$

und $\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_f^\times$ ist als Quotient von $\widehat{\mathbb{Z}}$ kompakt.

Entsprechendes gilt für Zahlkörper F anstelle von \mathbb{Q} : $F^\times \backslash \mathbb{A}_{F,f}^\times$ kompakt.

Da jeder Torus $/\mathbb{Q}$ über einem Zahlkörper spaltet, folgt die Behauptung. □

Shimura-Varietäten für Tori

Sei T/\mathbb{Q} ein Torus.

Jeder Homomorphismus $h: \mathbb{S} \longrightarrow T_{\mathbb{R}}$ definiert eine Shimura-Varietät.

$\text{Sh}_K(T, X)$ endl. Menge

Shimura-Varietäten für Tori

Sei T/\mathbb{Q} ein Torus.

Jeder Homomorphismus $h: \mathbb{S} \rightarrow T_{\mathbb{R}}$ definiert eine Shimura-Varietät.

$\text{Sh}_K(T, X)$ endl. Menge

Betrachtet man allgemeiner statt $G(\mathbb{R})$ -Konjugationsklassen X endliche Überlagerungen von solchen, so kann man stets $\pi_0(\text{Sh}_K)$ als null-dimensionale “gemischte Shimura-Varietät” auffassen.

Übergang zum proj. Limes

Der inverse Limes

$$\mathrm{Sh}(G, X) = \varprojlim_K \mathrm{Sh}_K(G, X)$$

existiert als Schema über \mathbb{C} — dieses ist lokal noethersch und regulär, aber nicht von endlichem Typ.

Die Gruppe $G(\mathbb{A}_f)$ operiert von rechts auf $\mathrm{Sh}(G, X)$, und für $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen, gilt

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) = \mathrm{Sh}(G, X)/K.$$

Beispiel: Modulkurven

Sei $G = GL_2$, $X = \mathbb{H}^\pm = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Die Shimura-Varietät $\text{Sh}_K(G, X)$ ist die Vereinigung der Modulkurven $\Gamma_i \backslash \mathbb{H}$, wobei die a_i ein Vertretersystem für $GL_2(\mathbb{Q})_+ \backslash GL_2(\mathbb{A}_f) / K$ in $GL_2(\mathbb{A}_f)$ bilden, und

$$\Gamma_i = SL_2(\mathbb{Q}) \cap a_i K a_i^{-1}.$$

Zusammenhangskomp. in diesem Fall

Die Abbildung

$$GL_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathbb{H}^\pm \times GL_2(\mathbb{A}_f) / K = GL_2(\mathbb{Q}) \backslash GL_2(\mathbb{A}) / K \cdot K_\infty \xrightarrow{\det} \mathbb{Q}^\times \backslash \{\pm 1\} \times \mathbb{A}_f^\times / \det(K)$$

induziert

$$\pi_0(\mathrm{Sh}_K(GL_2, \mathbb{H}^\pm)) = \mathbb{Q}_{>0} \backslash \mathbb{A}_f^\times / \det(K)$$

Beispiel

Sei $K = \ker GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Dann ist
 $K \cap SL_2(\mathbb{Q}) = \Gamma(N)$.

Dann ist $\pi_0(\mathrm{Sh}_K) = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$.

- 1 Adele
- 2 Shimura-Varietäten
- 3 Der Siegel-Fall**
- 4 Allgemeinere Shimura-Varietäten

Gruppe der symplektischen Ähnlichkeiten

k Körper, $\text{char } k \neq 2$. Zu einem symplektischen k -VR (V, ψ) sei $GSp(V, \psi)$ definiert durch

$$GSp(V, \psi)(R) = \{g \in GL(V)(R); \\ \exists c(g) \in R^\times : \forall u, v : \psi(gu, gv) = c(g)\psi(u, v)\},$$

R eine k -Algebra. Definiere die symplektische Gruppe $Sp(V, \psi)$ durch

$$1 \longrightarrow Sp(V, \psi) \longrightarrow GSp(V, \psi) \xrightarrow{c} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1.$$

Es gilt $GSp(V, \psi)^{\text{der}} = Sp(V, \psi)$.

Beispiele

Beispiel

Ist $\dim V = 2$, so ist $GSp(V, \psi) = GL(V) \cong GL_2$, $Sp(V, \psi) \cong SL_2$.

Beispiel

$V = k^{2n}$, ψ gegeben durch $\begin{pmatrix} & -E_n \\ E_n & \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$\begin{aligned} GSp_{2n}(R) &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}; \exists c \in R^\times : {}^tAC = {}^tCA, {}^tBD = {}^tDB, \right. \\ &\quad \left. -{}^tAD + {}^tCB = cE_n, -{}^tBC + {}^tDA = cE_n \right\} \\ &\subseteq GL_{2n}(R). \end{aligned}$$

Das Shimura-Datum zu einem symplektischen VR

Sei (V, ψ) ein symplektischer \mathbb{Q} -VR, $G = GSp(V, \psi)$.

Ist $J \in G^{\text{der}}(\mathbb{R})$ eine komplexe Struktur auf $V(\mathbb{R})$, so erhalte HS $h_J: \mathbb{S} \rightarrow G \subseteq GL(V)$ vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$ auf V .

Wir nennen J positiv (negativ), wenn $\psi(u, Jv)$ positiv (negativ) definit ist.

Sei X^+ (bzw. X^-) die Menge der positiven (bzw. negativen) kompl. Str. auf $V(\mathbb{R})$, $X = X(V, \psi) = X^+ \amalg X^-$.

$G(\mathbb{R})$ operiert auf X durch $g \cdot J := gJg^{-1}$.

Der Stabilisator von X^+ ist $G(\mathbb{R})^+ = \{g \in G(\mathbb{R}); c(g) > 0\}$.

$Sp(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf X^+ , und $G(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf X .

Mittels der Korrespondenz $J \mapsto h_J$ können wir X identifizieren mit einer $G(\mathbb{R})$ -Konjugationsklasse von Morphismen $h: \mathbb{S} \rightarrow G$.

Beh.: (G, X) ist ein Shimura-Datum.

(G, X) ist Shimura-Datum

SV1 Für alle $h \in X$ ist $\text{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ vom Typ $(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$.

Schreibe $V^+ = V^{-1,0}$, $V^- = V^{0,-1}$,

$$\begin{array}{cccc} \text{End}(V(\mathbb{C})) = & (V^+, V^+) \oplus & (V^+, V^-) \oplus & (V^-, V^+) \oplus & (V^-, V^-) \\ h(z) \text{ op. als} & 1 & z/\bar{z} & \bar{z}/z & 1 \end{array}$$

Die Lie-Algebra ist

$$\text{Lie}GSp(V, \psi) = \{f \in \text{End}(V(\mathbb{C})); \psi(f(u), v) + \psi(u, f(v)) = 0\}.$$

SV2 Die Involution $\text{in}h(i)$ ist eine Cartan-Involution von $G_{\mathbb{R}}^{\text{ad}}$.

$h(i)^2 = -1$ liegt im Zentrum von $Sp(V, \psi)(\mathbb{R})$, und ψ ist eine $h(i)$ -Polarisierung.

SV2 Die Involution $\text{in}h(i)$ ist eine Cartan-Involution von $G_{\mathbb{R}}^{\text{ad}}$.

$h(i)^2 = -1$ liegt im Zentrum von $Sp(V, \psi)(\mathbb{R})$, und ψ ist eine $h(i)$ -Polarisierung.

SV3 G^{ad} hat keinen über \mathbb{Q} definierten Faktor H , so dass $H(\mathbb{R})$ kompakt ist.

$GSp(V, \psi)_{\mathbb{Q}}^{\text{ad}}$ ist einfach und $GSp(V, \psi)^{\text{ad}}(\mathbb{R})$ ist nicht kompakt.

Sh_K als Modulraum von Hodge-Strukturen

Sei \mathcal{H}_K die Menge von Tripeln $((W, h), s_0, \eta K)$, wo

- (W, h) eine HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$
- $\pm s_0$ eine Polarisierung von W
- ηK ein K -Orbit von Isom. $V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\cong} W(\mathbb{A}_f)$, der ψ auf ein \mathbb{A}_f^\times -Vielfaches von s_0 abbildet.

Isomorphismen sind Isomorphismen

$$b: (W, h) \xrightarrow{\cong} (W', h'),$$

so dass

$$b(s_0) = cs'_0, \quad c \in \mathbb{Q}^\times, \quad b \circ \eta = \eta' \pmod{K}$$

Ein Element $((W, h), s_0, \eta)$ entspricht einem symplektischen \mathbb{Q} -VR (W, s_0) mit einer komplexen Struktur, die positiv oder negativ für s_0 ist, und einer Bahn ηK .

Insbesondere ist $\dim V = \dim W$, also existiert ein Isomorphismus

$$a: W \xrightarrow{\cong} V,$$

der s_0 auf ein \mathbb{Q}^\times -Vielfaches von ψ abbildet.

Dann liegt

$$ah := (z \mapsto a \circ h(z) \circ a^{-1})$$

in X , und

$$V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\eta} W(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{a} V(\mathbb{A}_f)$$

liegt in $G(\mathbb{A}_f)$.

Ist $a': W \xrightarrow{\cong} V$ ein anderer Isomorphismus, so existiert $q \in G(\mathbb{Q})$ mit $a' = q \circ a$. Ersetzt man a durch a' , so wird $(ah, a \circ \eta)$ durch $(qah, qa \circ \eta)$ ersetzt.

Erhalten so wohldefinierte Abbildung

$$\mathcal{H}_K \longrightarrow G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K, \quad (W, \dots) \mapsto (ah, a \circ \eta).$$

Satz

Diese Abbildung ist eine Bijektion

$$\mathcal{H}_K \xrightarrow{\cong} \text{Sh}_K(\mathbb{C})$$

Abelsche Varietäten über \mathbb{C}

Definition

Sei k ein Körper. Eine abelsche Varietät ist ein zusammenhängendes, glattes, eigentliches Gruppenschema über k .

Ist A eine abelsche Varietät über \mathbb{C} , so hat A als komplexe Mf. die Form \mathbb{C}^n/Λ , $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ ein Gitter.

Es ist dann $\pi_1(A, 0) = \Lambda$, also

$$H_1(A, \mathbb{Z}) = \Lambda, \quad H^1(A, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{Z}).$$

Algebraisierbarkeit komplexer Tori

Frage: Welche komplexen Tori \mathbb{C}^n/Λ sind abelsche Varietäten, d. h. sind algebraisierbar?

Theorem

Ein kpl. Torus \mathbb{C}^n/Λ ist genau dann algebraisierbar, wenn eine **Riemann-Form** Ψ existiert, d. h. eine alternierende Form

$$\Psi: \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z},$$

so dass $\Psi_{\mathbb{R}}(Ju, Jv) = \Psi_{\mathbb{R}}(u, v)$ für alle $u, v \in \Lambda \otimes \mathbb{R} = \mathbb{C}^n$, und $\Psi(u, Ju) > 0$ für $u \neq 0$.

Theorem (Riemann)

Der Funktor

$$A \mapsto H_1(A, \mathbb{Z})$$

ist eine Äquivalenz zwischen der

- *Kategorie AV der abelschen Varietäten / \mathbb{C} und der*
- *Kategorie der polarisierbaren ganzen HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$.*

Sei $AV_{\mathbb{Q}}$ die Kategorie der ab. Var. über \mathbb{C} bis auf Isogenie:

Objekte: Abelsche Varietäten / \mathbb{C} ,

Morphismen: $\text{Hom}_{AV_{\mathbb{Q}}}(A, B) = \text{Hom}_{AV}(A, B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Korollar

Der Funktor

$$A \mapsto H_1(A, \mathbb{Q})$$

ist eine Äquivalenz zwischen $AV_{\mathbb{Q}}$ und der Kategorie der polarisierbaren rationalen HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$.

Sh als Modulraum abelscher Varietäten

Sei \mathcal{M}_K die Menge von Tripeln $(A, s, \eta K)$, wo

- A eine abelsche Varietät der Dimension $g = \frac{1}{2} \dim V$ über \mathbb{C}
- $\pm s$ eine Polarisierung von $H_1(A, \mathbb{Q})$
- η ein Isomorphismus $V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\cong} H_1(A, \mathbb{A}_f)$, der ψ auf ein \mathbb{A}_f^\times -Vielfaches von s abbildet.

Dabei sind zwei Tripel $(A, s, \eta K)$, $(A', s', \eta' K)$ isomorph wenn eine Isogenie $A \rightarrow A'$ existiert, die s auf ein \mathbb{Q}^\times -Vielfaches auf s' , und ηK auf $\eta' K$ abbildet.

Satz

Die Menge $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ steht in natürlicher Weise in Bijektion zu \mathcal{M}_K / \cong .

- 1 Adele
- 2 Shimura-Varietäten
- 3 Der Siegel-Fall
- 4 Allgemeinere Shimura-Varietäten**

Quaternionenalgebren

Sei F ein Körper der Char. 0.

Definition

Eine Quaternionenalgebra über F ist eine F -Algebra B , so dass

- B ist zentral, d. h. das Zentrum von B ist F
- B ist einfach, d. h. B hat keine nicht-trivialen zweiseitigen Ideale
- $\dim_F B = 4$

Beispiel

- $M_2(F)$
- $F = \mathbb{R}$, $B = \mathcal{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ die Hamiltonschen Quaternionen ($i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$)

Quaternionenalgebren II

Satz

B Divisionsalgebra $\iff B \not\cong M_2(F)$

Konstruktion

Seien $a, b \in F$. Dann ist

$$B = F \oplus Fi \oplus Fj \oplus Fk$$

mit

$$i^2 = a, j^2 = b, ij = k = -ji$$

eine Quaternionenalgebra, und jede Quaternionenalgebra hat diese Form.

Quaternionenalgebren III

Satz

Ist F algebraisch abgeschlossen, so ist jede Quaternionenalgebra über F isomorph zu $M_2(F)$.

Satz

Jede Quaternionenalgebra über \mathbb{R} ist isomorph zu $M_2(\mathbb{R})$ oder zu \mathcal{H} .

Shimura-Kurven

Sei B eine Quaternionendivisionsalgebra über \mathbb{Q} mit $B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$.

Sei G die algebraische Gruppe über \mathbb{Q} mit

$$G(R) = (B \otimes_{\mathbb{Q}} R)^{\times} \text{ für } R \text{ eine } \mathbb{Q}\text{-Algebra.}$$

Dann gilt $G_{\mathbb{R}} = GL_{2,\mathbb{R}}$, also ist $X := \mathbb{H}^{\pm}$ eine $G(\mathbb{R})$ -Konjugationsklasse von $\text{Homom. } \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$.

(G, X) ist ein Shimura-Datum. $\text{Sh}_K(G, X)$ ist eine endliche Vereinigung von **kompakten** Riemannschen Flächen.

Nicht-modulare Shimura-Kurven

F total reeller Zahlkörper, $d = [F : \mathbb{Q}] > 1$.

B Quaternionenalgebra über F , die an genau einer unendlichen Stelle zerfällt.

G/\mathbb{Q} definiert durch $G(R) = (B \otimes_{\mathbb{Q}} R)^{\times}$

$h: \mathbb{S} \longrightarrow GL_{2,\mathbb{R}} \subset GL_{2,\mathbb{R}} \times \mathcal{H}^{\times} \times \cdots \times \mathcal{H}^{\times} = G_{\mathbb{R}}$

Erhalte Shimura-Datum $(G, \{h\})$.

Der Gewichtshomomorphismus

Der Gewichtshomomorphismus eines Shimura-Datums (G, X) ist

$$w_X: \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}.$$

Der Gewichtshomomorphismus

Der Gewichtshomomorphismus eines Shimura-Datums (G, X) ist

$$w_X: \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{G}_{\mathbb{R}}.$$

Hat $\text{Sh}_K(G, X)$ eine natürliche Interpretation als Modulraum (von rationalen Hodge-Strukturen o. ä.), so ist w_X definiert über \mathbb{Q} .

Wie sehen daran, dass eine solche modulare Beschreibung für die Shimura-Kurven im vorherigen Beispiel nicht existiert.

Algebren mit Involution

k Körper. B k -Algebra, insbes. $\dim_k B < \infty$.

Involution: $*$: $B \rightarrow B$, k -linear, $(ab)^* = b^* a^*$, $a^{**} = a$.

Lemma

Sei k alg. abgeschl., sei $(B, *)$ eine halbeinfache k -Alg. mit Involution. Dann ist $(B, *)$ isomorph zu einem Produkt von Alg. mit Inv. der folg. Typen:

$$A \quad M_n(k) \times M_n(k), (x, y)^* = ({}^t y, {}^t x),$$

$$C \quad M_n(k), x^* = {}^t x.$$

$$BD \quad M_n(k), x^* = J \cdot {}^t x \cdot J^{-1}, J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

PEL-Datum

- B halbeinfache \mathbb{Q} -Algebra mit (positiver) Involution $*$
- $V \neq 0$ ein treuer endlich erzeugter Links- B -Modul
- $\psi: V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}$ eine $*$ -hermitesche nicht-ausgeartete alternierende Paarung:

$$\psi(bu, v) = \psi(u, b^*v)$$

Zugehörige algebraische Gruppe über \mathbb{Q}

$$\begin{aligned} G(\mathbb{Q}) &= \{g \in \text{Aut}_B(V); \exists c(g) \in \mathbb{Q}^\times : \psi(gu, gv) = c(g)\psi(u, v)\} \\ &\subseteq GL(V) \end{aligned}$$

Sei $h_0: \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$, so dass V vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$ ist, und die Form $\psi(u, h(i)v)$ symmetrisch und positiv definit ist. Sei X die $G(\mathbb{R})$ -Konjugationsklasse von h_0 .

Lemma

Es ist (G, X) ein Shimura-Datum.

Satz

Sei $K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen. Dann parametrisiert $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ die Isomorphieklassen von Quadrupeln $(A, i, \bar{\lambda}, \eta K)$ mit

- A eine abelsche Varietät $/\mathbb{C}$ bis auf Isogenie
- $i: B \rightarrow \text{End}(A)$, so dass

$$\text{Tr}(i(b), T_0 A) = \text{Tr}(b|_{V(\mathbb{C})/F_{h_0}^0 V(\mathbb{C})}) \text{ für alle } b \in B$$

- $\bar{\lambda}$ eine homogene Polarisierung von A , die via i auf B die Involution $*$ induziert.
- ηK ist ein K -Orbit von $B \otimes \mathbb{A}_f$ -linearen Isomorphismen

$$\eta: V(\mathbb{A}_f) \rightarrow H^1(A, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{A}_f,$$

der ψ auf ein \mathbb{A}_f^\times -Vielfaches von s abbildet,

so dass gilt ...

... so dass gilt:

- Es ex. ein B -linearer Isom. $a: H_1(A, \mathbb{Q}) \longrightarrow V$, der die von $\bar{\lambda}$ induzierte Form auf ein \mathbb{Q}^\times -Vielfaches von ψ abbildet.
- Für die HS h auf $H_1(A, \mathbb{Q})$ gilt: $a^{-1}ha$ ist konjugiert zu h_0 .

Morphismen von Shimura-Varietäten

Definition

Seien (G, X) , (G', X') Shimura-Daten.

- 1 Ein Morphismus $(G, X) \longrightarrow (G', X')$ von Shimura-Daten ist ein Homomorphismus $G \longrightarrow G'$ algebraischer Gruppen, der X nach X' abbildet.
- 2 Ein Morphismus $\text{Sh}(G, X) \longrightarrow \text{Sh}(G', X')$ von Shimura-Varietäten ist ein inverses System von Morphismen von Varietäten, das kompatibel mit der $G(\mathbb{A}_f)$ -Operation ist.

Theorem

Ein Morphismus $(G, X) \longrightarrow (G', X')$ von Shimura-Daten induziert einen Morphismus $\text{Sh}(G, X) \longrightarrow \text{Sh}(G', X')$ von Shimura-Varietäten. Ist der Homom. $G \longrightarrow G'$ injektiv, so ist dieser eine abgeschlossene Immersion.

Shimura-Varietäten vom Hodge-Typ

Definition

Eine Shimura-Varietät $\text{Sh}(G, X)$ heißt Shimura-Varietät **vom Hodge-Typ**, falls ein symplektischer VR (V, ψ) über \mathbb{Q} und ein injektiver Homomorphismus $\rho: G \rightarrow \text{GSp}(V, \psi)$ existieren, der X nach $X(\psi)$ abbildet.

Shimura-Varietäten vom Hodge-Typ sind Modulräume von Hodge-Strukturen.

Sei $\text{Sh}(G, X)$ eine Shimura-Varietät vom Hodge-Typ,
 $G \longrightarrow \text{GSp}(V, \psi)$.

Lemma

Es existieren lineare Abbildungen $t_i : V^{\otimes n_i} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $i = 1, \dots, n$, so dass G die Untergruppe von $\text{GSp}(V, \psi)$ ist, die alle t_i fixiert.

Satz

Die Menge $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ parametrisiert die Isomorphieklassen von Tupeln $(W, h, (s_i)_i, \eta K)$, wobei

- (W, h) eine HS vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$
- $\pm s_0$ eine Polarisierung von W
- $s_1, \dots, s_n : W^{\otimes n_i} \longrightarrow \mathbb{Q}$ lin. Abb.
- ηK ein K -Orbit von $\text{Isom. } V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\cong} W(\mathbb{A}_f)$, der ψ auf ein \mathbb{A}_f^\times -Vielfaches von s_0 , und für $i = 1, \dots, n$, t_i auf s_i abbildet.

Übersicht

- Sh.-Var. vom PEL-Typ \subset
- Sh.-Var. vom Hodge-Typ \subset
- Sh.-Var. vom abelschen Typ \subset
- Sh.-Var.