Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **SS 2007**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 3, Abgabe am 24.04.2007

Sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 9

Zeige, dass $I(\mathbb{A}^n(k)) = 0$, ohne den Hilbertschen Nullstellensatz zu benutzen.

Aufgabe 10

Zeige, dass die affinen algebraischen Mengen $X_1 = V(T_2 - T_1^2)$, $X_2 = V(T_1T_2 - 1)$ und $X_3 = V(T_2^2 - T_1^3)$ in $\mathbb{A}^2(k)$ irreduzibel, und paarweise nicht isomorph sind. Bestimme, in welchen Fällen der affine Koordinatenring faktoriell ist.

Aufgabe 11

Sei $\lambda \in k$, und sei $C = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \subset \mathbb{A}^2(k)$. Für welche λ existiert ein nicht-konstanter Morphismus $\mathbb{A}^1(k) \longrightarrow C$?

Aufgabe 12

Sei $n \geq 1$. Wir fassen den affinen Raum $A^{n^2}(k)$ auf als die Menge $M_{n\times n}(k)$ der $n \times n$-Matrizen über k.

Zeige, dass für $0 \leq i \leq n$ die Menge

$$X_i := \{A \in M_{n\times n};\ \operatorname{rg} A \leq i\}$$

abgeschlossen in $M_{n\times n}(k)$ ist, und dass die Teilmenge

$$Y_i := \{A \in M_{n\times n};\ \operatorname{rg} A = i\}$$

offen in X_i ist.