Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2007/08**

Übungen zur Algebraischen Geometrie 2

Blatt 11, Abgabe am 15.1.2008

Aufgabe 41

Sei X ein noethersches Schema. Sei $\mathscr{L}$ ein lokalfreier $\mathscr{O}_X$-Modul von endlichem Rang. Wir schreiben $\mathscr{L}^\vee := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X)$. Zeige: für alle $\mathscr{O}_X$-Moduln $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ und alle $i \geq 0$ gilt:

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}, \mathscr{G}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F}, \mathscr{G} \otimes \mathscr{L}^\vee)$$

und

$$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}, \mathscr{G}) \cong \mathscr{E}xt^i(\mathscr{F}, \mathscr{G} \otimes \mathscr{L}^\vee) \cong \mathscr{E}xt^i(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes \mathscr{L}^\vee.$$

Aufgabe 42

Sei X ein noethersches Schema.

a) Sei $\cdots \to \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_0 \to \mathscr{F} \to 0$ eine exakte Sequenz von kohärenten $\mathscr{O}_X$-Moduln, und seien alle $\mathscr{L}_i$ lokalfrei. Zeige, dass man für alle $\mathscr{O}_X$-Moduln $\mathscr{G}$ (in $\mathscr{G}$ funktorielle) Isomorphismen

$$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \cong h^i(\mathscr{H}om(\mathscr{L}_\bullet, \mathscr{G}))$$

hat.

b) Seien $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ kohärente $\mathscr{O}_X$-Moduln. Sei $x \in X$. Dann ist für alle $i \geq 0$:

$$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F}, \mathscr{G})_x \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{F}_x, \mathscr{G}_x).$$

Aufgabe 43

a) Sei X ein Schema. Zeige: Pic(X) $\cong H^1(X, \mathscr{O}_X^\times)$.

b) Sei C eine normale projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, und $K(C)$ der Funktionenkörper von C.

Es sei $\mathrm{Div}(C) := \bigoplus_{x \in C_0} \mathbb{Z} \cdot [x]$ die freie abelsche Gruppe über der Menge der abgeschlossenen Punkte von C, die sogenannte Gruppe der Weil-Divisoren auf C. Jedem Element $f \in K(C)^\times$ ordnen wir den Weil-Divisor $\sum_x v_x(f)[x]$ zu (vgl. Aufgabe 27, Blatt 7). Wir erhalten so einen Homomorphismus $K(C)^\times \to \mathrm{Div}(C)$.

Ist $D = \sum_x a_x[x]$ ein Weil-Divisor, so definieren wir die Garbe $\mathscr{O}(D)$ auf C durch

$$\mathscr{O}(D)(U) = \{f \in K(C);\ \forall x \in U : v_x(f) \geq -a_x\}, \qquad \emptyset \neq U \subseteq C \text{ offen.}$$

Zeige, dass $\mathscr{O}(D)$ in der Tat eine Garbe, und sogar ein invertierbarer $\mathscr{O}_X$-Modul ist.

Zeige, dass wir insgesamt eine exakte Sequenz

$$1 \to \Gamma(C, \mathscr{O}_C)^\times \to K(C)^\times \to \operatorname{Div}(C) \to \operatorname{Pic}(C) \to 1$$

erhalten.

Eine Konsequenz ist, dass die Gradabbildung $\deg\colon \operatorname{Div}(C) \to \mathbb{Z}$, $\sum_x a_x[x] \mapsto \sum a_x$ über $\operatorname{Pic}(C)$ faktorisiert. Wir können also vom Grad eines Geradenbündels auf C sprechen.

Aufgabe 44

Seien R ein Ring, A eine R-Algebra und M ein A-Modul. Eine (R-)Derivation $D\colon A \to M$ ist ein Homomorphismus von R-Moduln, der die Leibniz-Regel

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b \qquad \text{für alle } a, b \in A$$

erfüllt. (Insbesondere ist $D(r) = 0$ für alle $r \in R$.) Die Menge $\operatorname{Der}_R(A, M)$ aller R-Derivationen von A nach M ist in natürlicher Weise ein A-Modul.

Zeige, dass es einen A-Modul $\Omega^1_{A/R}$ zusammen mit einer Derivation $d\colon A \to \Omega^1_{A/R}$ gibt, der den Funktor $\operatorname{Der}_R(A, -)$ darstellt:

$$\operatorname{Hom}_A(\Omega^1_{A/R}, M) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Der}_R(A, M), f \mapsto f \circ d$$

ist ein Isomorphismus für alle A-Moduln M. Der A-Modul $\Omega^1_{A/R}$ heißt der Modul der (relativen) Kähler-Differentiale.

Hinweis: Eine Möglichkeit ist diese: Sei I der Kern der Multiplikationsabbildung $A \otimes_R A \to A$. Setze $\Omega^1_{A/R} := I/I^2$, und $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$.