Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann Wintersemester 2011/12

Probeklausur zur Linearen Algebra I

20.01.2012

Aufgabe 1: (7+4 Punkte)
Bestimme eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes der linearen Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4$, deren Matrix bezüglich der Standardbasis durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{Q})$$

gegeben ist.

Aufgabe 2: (5+5 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{Q}^4$ der Unterraum, der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Berechne eine Basis von U und bestimme einen Komplementärraum W von U.

Aufgabe 3: (6+2+5+2 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & -12 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(i) Berechne das charakteristische Polynom von A.

(ii) Berechne die Eigenwerte von A über $\mathbb{Q}$.

(iii) Berechne Basen der Eigenräume von A über $\mathbb{Q}$.

(iv) Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$? Ist A trigonalisierbar?

Aufgabe 4:(10 Punkte) Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i).$$

Aufgabe 5: (8+10 Punkte)
Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(i) Zeige: f ist genau dann von der Form $f = c \cdot \mathrm{id}_V$ mit $c \in K$, wenn jeder Vektor $v \neq 0$ ein Eigenvektor von f ist.

(ii) Zeige, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $f^* : V^* \to V^*$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 6: (18 Punkte)
Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f^N = 0$ für ein $N > 0$. Zeige, dass $f^n = 0$ gilt.

Aufgabe 7: (6 Punkte)
Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$, $g : V \to V$ lineare Abbildungen. Ferner seien $e_1, \dots, e_n \in V$ und $b_1, \dots b_m \in W$.
Entscheide ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

1) Sind $f(e_1), \dots f(e_n)$ linear unabhängig, so sind $e_1 \dots, e_n$ linear unabhängig.
2) Falls $\dim W = m$, so ist f genau dann surjektiv, wenn $b_1, \dots, b_m \in \mathrm{im}\, f$.
3) Falls $g^2 = 0$ gilt, so ist $\dim \ker g \geq \frac{1}{2} \dim V$.
4) Falls $f \circ g = 0$, so gilt $\mathrm{im}\, g = \ker f$.
5) Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist f surjektiv.
6) $\mathrm{im}\, g \cap \ker f = 0 \Rightarrow \dim \mathrm{im}\, f = \dim \mathrm{im}(f \circ g)$.

Bei der Multiple-Choice Aufgabe gibt es für jede richtige Antwort 1 Punkt, und für jede falsche Antwort -1 Punkt; insgesamt aber minimal 0 Punkte.