Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Lineare Algebra I

Übungsblatt 5

Abgabe 18.11.2011

Aufgabe 1:
Sei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Dimension des von b_1, b_2, b_3 und b_4 erzeugten Untervektorraums des $\mathbb{Q}^4$ mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper und A eine $m \times m$-Matrix, B eine $m \times n$-Matrix und C eine $n \times n$-Matrix. Ferner sei

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

(i) Zeige, dass $\operatorname{rg} D \geq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} C$ gilt.

(ii) Zeige, dass in (i) Gleichheit gilt, falls $\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$ gilt.

(iii) Gilt auch die Umkehrung von (ii)? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper mit mindestens 3 Elementen und seien V und W Vektorräume über K. Sei $f : V \to W$ eine Abbildung. Zeige:

(i) Die Abbildung f ist genau dann linear, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

  (a) $f(av_1 + (1-a)v_2) = af(v_1) + (1-a)f(v_2)$ für alle $a \in K$ und $v_1, v_2 \in V$,

  (b) $f(0) = 0$.

(ii) Erfüllt f die Bedingung (a) von Teil (i) und ist $w \in W$, so erfüllt auch die Abbildung $g : V \to W$, die durch $v \mapsto f(v) + w$ definiert ist, die Bedingung (a).

(iii) Erfüllt f die Bedingung (a), so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $g : V \to W$ und ein eindeutig bestimmtes Element $\tilde{w} \in W$ mit $f(v) = g(v) + \tilde{w}$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper.

(i) Bestimme alle linearen Abbildungen $f : K \to K$.

(ii) Seien $a, b \in K$. Betrachte $f : K^2 \to K,\ (x, y) \mapsto ax + by$. Bestimme eine Basis von

$$\ker f = \{(x, y) \in K^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

Wann ist f surjektiv?

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`

Die Fachschaft Mathematik informiert: Am 22. November findet die Semesterparty ab 22h im *Goldenen Engel* (Kesselgasse 1, Nähe Friedensplatz) statt. Kartenvorverkauf (2.50 €) am 17.11., 21.11. und 22.11. in der Poppelsdorfer Mensa. Abendkasse 4.00 €.
Mehr Info's unter `http://fsmath.uni-bonn.de`