Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

WS 2011/12

Lineare Algebra I

Übungsblatt 7

Abgabe 2.12.2011

Aufgabe 1:
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit f^N die N-fache Verkettung von f mit sich selbst. Zeige: Es existieren eine natürliche Zahl N und Skalare $a_0, \dots, a_N \in K$ mit $a_N = 1$ und $a_0 \mathrm{id}_V + a_1 f^1 + \cdots + a_N f^N = 0$.

Aufgabe 2:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechne AB und BA.

(ii) Bestimme den Rang von A und B und, wenn möglich, die Inversen A^{-1} und B^{-1}.

Aufgabe 3:
Sei A_n die folgende $n \times n$-Matrix über $\mathbb{Q}$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

wobei die Einträge außerhalb der Diagonalen und der beiden Nebendiagonalen 0 sind.

(i) Berechne A_4^{-1}.

(ii) Berechne A_n^{-1}.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper und $A \in M_{n\times n}(K)$ eine Matrix, für die gilt: $AB = BA$ für alle $B \in M_{n\times n}(K)$. Zeige, dass A dann die Form λE_n für ein $\lambda \in K$ haben muss.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`