Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Lineare Algebra I

Übungsblatt 9

Abgabe 16.12.2011

Aufgabe 1:

(i) Betrachte die beiden folgenden Permutationen $\sigma, \tau \in S_5$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechne $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^{-1}$ und τ^{-1}.

(ii) Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Zeige, dass sich jede Permutation $\sigma \in S_n$ als Produkt von Transpositionen $\tau_{12}, \dots, \tau_{n-1,n}$ schreiben läßt (dabei können die $\tau_{i,i+1}$ in beliebiger Reihenfolge und auch mehrfach vorkommen), d.h. S_n wird von $\{\tau_{12}, \dots, \tau_{n-1,n}\}$ erzeugt.

(iii) Bestimme für die Permutationen σ und τ eine Produktdarstellung wie in (ii).

Aufgabe 2:

Nach dem Satz über die Bruhatzerlegung läßt sich jede Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ eindeutig in der Form

$$A = UP_\sigma B$$

schreiben, wobei $\sigma \in S_n$, $U \in \mathcal{U}_\sigma$ und $B \in \mathcal{B}$. Bestimme σ, U und B in den folgenden Fällen:

(i)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}), \ n \geq 2.$$

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Betrachte die Menge

$$R = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Für $\sigma \in S_n$ definiere $R_\sigma = \{(i,j) \in R \mid \sigma(i) < \sigma(j)\}$. Zeige:

(i) Für die in der Vorlesung definierte Untergruppe $\mathcal{U}_\sigma$ von $\mathrm{GL}_n(K)$ gilt:

$$\mathcal{U}_\sigma = \left\{ (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K) \;\middle|\; \begin{array}{c} a_{ii} = 1, \text{ für alle } i \\ a_{ij} = 0, \text{ für alle } i > j \text{ und alle } (i,j) \in R_{\sigma^{-1}} \end{array} \right\}.$$

(ii) Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und $\sigma \in S_n$ gilt:

$$\sigma(j) = 1 + \sharp\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i < j,\ (i,j) \in R_\sigma\} + \sharp\{k \in \mathbb{N} \mid j < k \leq n,\ (j,k) \notin R_\sigma\},$$

wobei $\sharp A$ die Anzahl der Elemente einer Menge A bezeichnet.

(iii) Die Abbildung $r : S_n \to \mathbb{P}(R)$, $\sigma \mapsto R_\sigma$ ist injektiv. Hierbei bezeichnet $\mathbb{P}(R)$ die Potenzmenge von R.

(iv) Aus (i,j), $(j,k) \in R_\sigma$ folgt $(i,k) \in R_\sigma$.

(v) Aus (i,j), $(j,k) \in R$ und $(i,k) \in R_\sigma$ folgt, dass mindestens eines der Paare (i,j) und (j,k) in R_σ liegt.

(vi) Sei $S \subset R$ eine Teilmenge, so dass (iv) und (v) gelten, wenn man dort R_σ durch S ersetzt. Zeige, das es ein $\sigma \in S_n$ gibt, so dass $S = R_\sigma$ gilt.

Aufgabe 4:

(i) Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Für $g \in G$ bezeichnen wir mit gHg^{-1} die Menge $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$. Zeige, dass die Menge $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ eine Untergruppe von G ist, die H enthält. Sie wird der *Normalisator* von H in G genannt.

(ii) Sei K ein Körper und $\mathcal{B} \subset G = \mathrm{GL}_n(K)$ die Untergruppe der invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen. Zeige: $N_G(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`