Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz

WS 2013/14

Algebra II

11. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$, $W(k)$ der Wittring von k.

a) Für $a, b \in W(k)$ gilt $V^m(a) \cdot V^n(b) = V^{m+n}(F^n(a) \cdot F^m(b))$.

b) Der Körper k ist genau dann perfekt, wenn $W(k)/pW(k)$ reduziert ist.

Aufgabe 2:

Sei wieder k ein Körper der Charakteristik $p > 0$, $W(k)$ der Wittring von k.

a) $W(k)$ ist ein lokaler Integritätsring mit maximalem Ideal $V_1(k) := \mathrm{im}(V) \subset W(k)$.

b) $W(k)$ ist genau dann noethersch, wenn k perfekt ist.

Hinweis zu b): Bestimme die Dimension des k-Vektorraums $V_1(k)/(V_1(k))^2$.

Aufgabe 3:

Sei p eine Primzahl, K eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}_p$. Sei R der Bewertungsring von K und $\mathfrak{p}$ sein maximales Ideal. Ferner sei $U_K^{(1)} := 1 + \mathfrak{p}$ die Gruppe der Einseinheiten von K.

a) Sei nun $a \in U_K^{(1)}$, $x \in \mathbb{Z}_p$, und $(x_n)_n$ eine Folge ganzer Zahlen, die p-adisch gegen x konvergiert. Dann ist die Folge $(a^{x_n})_n$ in K konvergent. Wir bezeichnen den Grenzwert mit a^x. Zeige, dass a^x in $U_K^{(1)}$ liegt, unabhängig von der Wahl der Folge $(x_n)_n$ ist, und dass $U_K^{(1)}$ so zu einem $\mathbb{Z}_p$-Modul wird.

b) Sei nun $p > 2$, $K = \mathbb{Q}_p$, $U^{(1)} = U_{\mathbb{Q}_p}^{(1)}$. Die Abbildungen $\log\colon U^{(1)} \to (p)$ und $\exp\colon (p) \to U^{(1)}$ sind zueinander inverse Isomorphismen.

Aufgabe 4:

Ist $p > 2$ eine Primzahl, so lässt sich die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Q}_p$ wie folgt beschreiben:

$$\mathbb{Q}_p^\times \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p^\times \cong \mathbb{Z} \times \mu_{p-1} \times U^{(1)} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p.$$

Dabei bezeichne μ_{p-1} die Gruppe der $(p-1)$-ten Einheitswurzeln.

Abgabe: Donnerstag, 16. Januar 2014.