

Algebra II
3. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei $K = \mathbb{Q}(x)$, wobei x eine Nullstelle des Polynoms $X^3 - X - 1$ ist. Zeige, dass $1, x, x^2$ eine \mathbb{Z} -Basis des Ringes der ganzen Zahlen von K ist.

Aufgabe 2:

Sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K . Sei $M/L/K$ ein Korperturm von endlichen separablen Erweiterungen, und seien S bzw. T die ganzen Abschlüsse von R in L bzw. M . Dann gilt für die Diskriminante

$$\Delta(T/R) = \Delta(S/R)^{[M:L]} \cdot N_{L/K}(\Delta(T/S)),$$

wobei $N_{L/K}$ die Norm von L über K bezeichnet.

Aufgabe 3:

Sei K ein algebraischer Zahlkörper und R der Ring der ganzen Zahlen von K . Zeige, dass ein Element $u \in R$ genau dann eine Einheit von R ist, wenn $N_{K/\mathbb{Q}}(u) \in \{-1, 1\}$.

Aufgabe 4:

Sei R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} , Restklassenkörper k und Quotientenkörper K . Es sei $f \in R[X]$ ein Eisensteinpolynom, d.h.

$$f = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_i \in \mathfrak{m} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad a_n \notin \mathfrak{m}^2,$$

und θ eine Nullstelle von f . Dann ist $S = R[X]/f = R[\theta]$ ein diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper k und somit voll verzweigt über R . Insbesondere ist S der ganze Abschluss von R in $L = K(\theta)$.

Tip: Zeige zunächst, dass S ein lokaler Ring mit Restklassenkörper k ist. Dann verifiziere eines der Kriterien für diskrete Bewertungsringe.

Abgabe: Donnerstag, 07. November 2013.