

מספר תלמיד :

--	--	--	--	--	--	--	--	--

מספר מחברת :

--	--	--

7.9.2005

**בחינה בקורס "מבנים אלגבריים 2" (80446)
מועד ב' תשס"ה**

המורה : פרופ' דוד קשדן

משך הבחינה : שתיים

ענו על כל השאלות הבאות. משקל כל שאלה 10 נקודות.
לכל שאלה יש מספר היגדים אפשריים. הקיפו בעיגול, על גבי טופס זה, את מספר הסעיף המתייחס להיגד הנכון ביותר.

בהצלחה!

1. יהיו $K, L \subseteq M$ שדות. נניח ש- $M = KL$, נסמן $F = K \cap L$ ונניח כי $[M : F] < \infty$. אזי:
 - א. $[M : F] \leq [K : F][L : F]$
 - ב. $[M : F] \leq [M : K][M : L]$
 - ג. תשובות א' ו- ב' אינן נכונות.
 - ד. תשובות א' ו- ב' שתיהן נכונות.

2. תהי L/K הרחבת שדות. נניח שקיימים $\alpha \in L$ טרנסצנדנטי מעל K ו- $\beta \in L$ אלגברי מעל K כך ש- $\beta \notin K$. אזי:
 - א. ההרחבה $K(\alpha, \beta)/K$ תמיד פשוטה.
 - ב. ההרחבה $K(\alpha, \beta)/K$ תמיד אינה פשוטה.
 - ג. על סמך הנתונים בשאלה לא ניתן לקבוע אם $K(\alpha, \beta)/K$ פשוטה או לא.

3. יהיו $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ ארבעה שורשים שונים של הפולינום $t^5 - 4t + 2$. אזי הדרגה $[\mathbb{Q}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) : \mathbb{Q}]$ שווה ל:
 - א. 4
 - ב. 5
 - ג. 20
 - ד. 120

4. יהי K שדה, $f \in K[t]$ פולינום אי-פריק, ו- $g \in K[t]$ פולינום כלשהו. יהי L שדה פיצול של g מעל K .
 - א. אם ל- f אין שורש ב- L , אזי f אי-פריק גם כפולינום ב- $L[t]$.

- ב. אם ל- f יש שורש ב- L , אזי f מחלק את g .
- ג. אם ל- f יש שורש ב- L , אזי $\deg f = \deg g$.
- ד. אם ל- f יש שורש ב- L , אזי f מתפצל ב- L .

5. יהי K שדה ממצייין ראשוני p ותהי L/K הרחבת שדות סופית נורמלית.

- טענה 1:** קיים שדה ביניים $K \subseteq F \subseteq L$ כך ש- L/F ספרבילית ו- F/K אי-ספרבילית לחלוטין.
- טענה 2:** קיים שדה ביניים $K \subseteq E \subseteq L$ כך ש- L/E אי-ספרבילית לחלוטין ו- E/K ספרבילית.

א. טענה 1 נכונה, טענה 2 אינה נכונה.

ב. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 אינה נכונה.

ג. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 נכונה.

ד. טענה 1 נכונה, טענה 2 נכונה.

6. נאמר, שמספר שלם n הוא בעל התכונה X אם קיימים שלמים a, b כך ש- $n = a^2 + ab + b^2$.

א. אם n, m בעלי התכונה X , גם nm בעל התכונה X .

ב. המספר 30 הוא בעל התכונה X .

ג. תשובות א' ו- ב' שתיהן נכונות.

ד. תשובות א' ו- ב' אינן נכונות.

7. נאמר, שמספר מרוכב $z = x + iy$ ניתן לבנייה בסרגל ובמחוגה אם האורכים x, y ניתנים לבנייה בסרגל ובמחוגה. יהי $\zeta = e^{2\pi i/13}$.

טענה 1: $\zeta + \zeta^3 + \zeta^9$ ניתן לבנייה בסרגל ובמחוגה.

טענה 2: $\zeta + \zeta^5 + \zeta^8 + \zeta^{12}$ ניתן לבנייה בסרגל ובמחוגה.

א. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 אינה נכונה.

ב. טענה 1 אינה נכונה, טענה 2 נכונה.

ג. טענה 1 נכונה, טענה 2 אינה נכונה.

ד. טענה 1 נכונה, טענה 2 נכונה.

8. מספר האיברים בשדה הפיצול של הפולינום $t^9 - 2t^3 + t$ מעל \mathbf{F}_3 הוא:

א. 9

ב. 27

ג. 3^6

ד. 3^9

9. יהי $f(t) = t^4 - 5t + 7$ ויהיו $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$ שורשי f ב- \mathbf{C} .

טענה 1: $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)/\mathbf{Q}$ הרחבת גלואה ו- $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\alpha, \beta)/\mathbf{Q}) \cong A_4$.

טענה 2: $\mathbf{Q}(\alpha, \beta, \gamma)/\mathbf{Q}(\alpha)$ הרחבת גלואה ו- $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\alpha, \beta, \gamma)/\mathbf{Q}(\alpha)) \cong S_3$.

- א. טענה 1 נכונה וגם טענה 2 נכונה.
- ב. טענה 1 נכונה אך טענה 2 אינה נכונה.
- ג. טענה 1 אינה נכונה אך טענה 2 נכונה.
- ד. טענה 1 אינה נכונה וגם טענה 2 אינה נכונה.

10. יהי $L = \mathbf{Q}(t)$ (שדה הפונקציות הרציונליות מעל \mathbf{Q}) ויהי $\sigma: L \rightarrow L$ האוטומורפיזם המוגדר ע"י

$$(\sigma(f))(t) = f\left(\frac{-1}{1+t}\right) \quad \text{לדוגמה: } \sigma \text{ מעביר את הפונקציה } t^2 \text{ ל-} \left(\frac{-1}{1+t}\right)^2.$$

$$\text{יהי } K = \{f \in L : \sigma(f) = f\}.$$

- א. ההרחבה L/K אלגברית, סופית וגלואה.
- ב. ההרחבה L/K אלגברית, סופית, אך אינה גלואה.
- ג. ההרחבה L/K אלגברית, אך $[L:K] = \infty$.
- ד. ההרחבה L/K טרנסצנדנטית ו- $K \neq \mathbf{Q}$.
- ה. $K = \mathbf{Q}$, כלומר אין פונקציות רציונליות לא קבועות שהן אינבריאנטיות תחת σ .